

Bölmə 1. EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN PREDMETİ.ELEMENTAR HADİSƏLƏR FƏZASI.TƏSADÜFÜ HADİSƏLƏR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏİLƏR

Ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti.

Bu gün ehtimal nəzəriyyəsi bütün təbiət elmlərinin təməl daşı, statistika isə insan fəaliyyətinin bütün sahələrinin ayrılmaz hissəsidir".Məşhur Amerika alimi Kəsin bu kəlamı ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın müasir dövrdə oynadığı rolu çox gözəl ifadə edir.Buna görə də bu elmlərin əsasları ilə tanış olmağı riyazi mədəniyyətin zəruri komponenti hesab etmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsi – nəzəri və tətbiqi əhəmiyyət kəsb edən riyazi elmdir.İndi elm və texnikanın elə bir sahəsi yoxdur ki, orada ehtimal-statistika üsullarından bu və ya başqa dərəcədə istifadə edilməsin.Bu cəhət həm ehtimal nəzəriyyəsinin, həm də onun tətbiq edildiyi müxtəlif elm sahələrinin (məsələn, riyaziyyat, fizika, kimya, biologiya, iqtisadiyyat, ekonometrika, tibbi elm, hərbi iş, texnika və s.) inkişafına geniş imkan vermişdir.

Son bir neçə onilliklər ərzində riyaziyyatda yeni elmi istiqamətlər meydana gəlmişdir.Bunlardan etibarlılıq, kütləvi xidmət, stoxostik proqramlaşdırma, atəş,dəniz dalğaları, meteorologiya, müşahidənin xətalاری, informasiya, radiotexnika, rabitə və s. nəzəriyyələri qeyd etmək olar. Ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiq sahələri daim genişlənir və bu proses bu gün də davam edir.Konkret həyatı məsələləri həll etməyə imkan verən bu elmi istiqamətlər ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafına əsaslanır.İndi ehtimal nəzəriyyəsinə nəinki riyaziyyatçı, habelə mühəndis, iqtisadçı, geoloq, həkim, fizik, kimyaçı, bioloq və s. kimi müxtəlif peşə sahibləri müraciət edir.

Təbiət və cəmiyyət qanunları səbəb əlaqələrinin təzahürü formalarına görə determinik və statistik qanunlara bölünür

Məlumdur ki, riyaziyyat , başqa elm sahələrində olduğu kimi, gerçək aləmdə baş verən hadisə və proseslərin qanunlarını öyrənir.Buna klassik nümunə kimi Nyuton mexanikasını göstərmək olar.Göy cisimlərinin çoxəsrlik müşahidəsi nəticəsində onların hərəkət qanunları riyazi düsturlar şəklində verilmişdir.Mexanikanın qanunlarına əsasən Günəş sisteminin planetlərinin mövcud vəziyyətinə görə onların gələcək zamanın istənilən anına vəziyyəti praktiki olaraq birqiymətli təyin edilə bilər.Eyni zamanda günəş və ay tutulmalarının tarixini əvvəlcədən söyləmək olar.Bütün bunlar determinik qanunlardır.

Bununla yanaşı makroaləmin əksər hadisələri haqqında bizim günbəgün dərinləşən və dəqiqləşən kifayət qədər biliklərimiz olmasına baxmayaraq onların keçmişi və gələcəyi haqqında dəqiq fikir söyləmək mümkün deyildir.Məsələn, iqlimin uzunmüddətli, havanın isə qısa müddətli dəyişməsi proqnozlaşdırmanın obyektı sayıla bilməz.Mikroaləmin əksər qanun və qanunauyğunluqları determinik çərçivəyə daxil edilə bilməz.Məsələn, nəzəri fizikaya görə konkret anda elektronun vəziyyəti haqqında heç nə demək mümkün olmadığı halda, onun fəzada paylanma vəziyyəti haqqında danışmaq olar.Bü cür qanunlara statistik qanunlar deyilir.Statistik qanunlara görə sistemin gələcək vəziyyəti birqiymətli olaraq deyil, müəyyən ehtimalla müəyyən edilir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin mühüm tətbiq sahələrindən biri də iqtisadiyyatdır.Bu gün iqtisadi proseslərin tədqiqi və proqnozlaşdırılmasını ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan

ekonometrik proqnozlaşdırma, regressiya analizi, trend və hamarlaşdırma modelləri və bir sıra digər üsullardan istifadə etmədən təsəvvür etmək mümkün deyildir.

İqtisadiyyatın sığorta ehtiyatı, ehtiyat gücləri, Dövlət ehtiyatı və bu kimi anlayışları statistik qanunauyğunluqların mövcudluğunu təsdiq edir. Bu isə ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqini zəruri edir. Eyni zamanda qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfsüz inkişaf mümkün deyildir. Həyatın yaranmasını, bioloji növlərin təkamülünü, bəşəriyyət tarixini, insanların yaradıcılıq fəaliyyətini, sosial-iqtisadi sistemlərin inkişafını təsadüfsüz təsəvvür etmək olmaz. Beləliklə, təsadüfün təzahürünə hadisənin artıq formalaşmış istiqamətdən müsbət (yeni elmi kəşflərin və texnologiyaların tətbiqi, istesalın təşkili və idarə edilməsinin yeni formaları və s.) və mənfi (kərtəbii fəlakətlər, avadanlığın sıradan çıxması, işçilərin xəstələnməsi, onların fiziki və psixi vəziyyəti və s.) kənarlaşma kimi baxmaq lazımdır. Bütün bunlar bilavasitə hadisənin axarının əhəmiyyətli surətdə dəyişməsinə gətirib çıxarır. Bəzət iqtisadiyyatı şəraitində xalq təsərrüfatı sahələrinin əlaqələri daha da mürəkkəbləşir. Beləliklə, dinamik sistemin inkişaf qanunauyğunluqlarına görə sosial-iqtisadi hadisələri təsvir edən qanunların statistik xarakteri güclənməlidir.

Bütün bunlar iqtisadi hadisə və proseslərin statistik analizinin bir vasitəsi kimi ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın metodlarının mənimsənilməsinə zəruri edir.

İnsan fəaliyyətinin bütün sahələrində nəticəsi təsadüfdən asılı olan, yəni nəticəsini əvvəlcədən söyləmək mümkün olmayan hadisələrə tez-tez rast gəlinir. Məsələn, sığorta edilmiş əmlakın təbii fəlakət nəticəsində sıradan çıxması təsadüfün nəticəsidir. Belə olan halda təsadüfə hadisələr haqqında əvvəlcədən nə isə söyləmək olarmı və yaxud sığorta şirkətləri öz işlərində nəyi əsas tuturlar? Məlum olur ki, sığorta edilmiş ayrıca bir obyektin gələcək taleyi haqqında heç nə söyləmək mümkün olmasa da, onların əksəriyyətinin vəziyyəti haqqında yəqinliklə çox şey demək olar.

Real gerçəklikdə baş verən hər bir hadisəni öyrənmək üçün insanlar müəyyən müşahidələr, təcrübələr, ölçmə işləri – sınaqlar aparırlar. Mümkün qədər çox aparıla bilən, praktiki olaraq qeyri-məhdud sayda təkrar edilə bilən sınaqların nəticəsinə əsasən həmin hadisənin xassələri və qanuna uyğunluğu aşkar edilir. İnsanlar bu qanunauyğunluğu öyrənməklə müəyyən dərəcədə təsadüfə hadisələri idarə etməyi, onların təsirinin nəticələrini əvvəlcədən söyləməyə və aradan qaldırmağa, hətta onlardan öz praktiki fəaliyyət sahələrində məsədyönlü şəkildə istifadə etmək imkanı əldə edirlər.

Tutaq ki, eyni şərtlər kompleksi daxilində aparılan sınaq nəticəsində hadisə baş verə və verməyə bilər. Onda təsadüfə hadisəni, hadisənin başvermə sayının aparılan sınaqların sayına nisbəti olan hadisənin tezliyi ilə xarakterizə etmək olar. Tezliyə misal olaraq müəyyən yaşayış məntəqəsində il ərzində doğulan oğlanların hissəsini, məhsul istehsalında keyfiyyətsiz məhsulun xüsusi çəkisini və s. göstərmək olar.

Coxlu sayda sınaqlardan ibarət müxtəlif seriyalarda hadisənin tezliyi müəyyən sabit ədəd ətrafında ehtizaz etdikdə deyirlər ki, bu hadisənin tezliyi dayanıqlıq xassəsinə malikdir. Məsələn, oğlan doğulma hadisəsinin tezliyi bu xassəyə malikdir.

Tezlikləri dayanıqlıq xassəsinə malik olan təsadüfə hadisələrə müxtəlif bilik sahələrində o cümlədən, fizikada, biologiyada, kimyada, maşınqayırma sənayesində, atəş nəzəriyyəsində, iqtisadiyyatda və s. tez-tez təsadüf edilir.

Hadisənin təsadüfçülüüyü onun səbəbsiz olması anlamına gətirmir. Təbiət hadisələri bir-biri ilə qarşılıqlı əlaqədədirlər və bir-birilərini şərtləndirirlər. Onların birinin dəyişilməsi digərinin dəyişilməsinə səbəb olur. Gerçək aləmdə ayrıca götürülmüş heç bir

hadisəni anlamaq mümkün deyildir. Əksinə istənilən hadisə onu əhatə edən hadisələrlə qarşılıqlı əlaqədə götürüldükdə onu anlamaq və əsaslandırmaq olur. Məsələn, atəş zamanı mərminin hədəfi vurması təsadüfə hadisədir və onun səbəbini əsaslandırmaq olar. Belə ki, mərminin uçuş traektoriyasına çoxlu sayda faktorlar təsir edir. Onların hər biri müxtəlif anlarda kəmiyyətə müxtəlif təsirlərə malikdirlər. Ona görə də müəyyən zaman kəsiyində onların hər birinin mərminin traektoriyasına ayrılıqda və birgə təsirini qiymətləndirmək mümkün olmur və nəticədə mərminin hədəfi vurması təsadüfün nəticəsi olur. Deməli, mərminin hədəfi vurmasına bir hadisə kimi baxdıqda, aparılan təcrübə zamanı o, baş verə də bilər, verməyə də bilər. Belə hadisənin konkret bir təcrübə zamanı baş verməsi haqqında qabaqcadan heç nə demək mümkün olmasa da, çoxlu sayda ardıcıl aparılan təcrübələr nəticəsində onun baş verib-verməməsi haqqında bəzən müəyyən qanunauyğunluq almaq olar.

Beləliklə, ehtimal nəzəriyyəsi tezlikləri dayanıqlı olan təsadüfə hadisələri öyrənir və bu hadisələrin kütləvi təkrarında onların qanunauyğunluqlarını aşkar edir.

Qanunauyğun hadisə dedikdə münasib şəraitdə hökmən baş verən hadisə başa düşülür. Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, elə hadisələr də vardır ki, onların baş verib-verməməsi təsadüfə xarakter daşıyır. Məsələn, bir atəş zamanı atılan güllə hədəfə dəyədə bilər, dəyməyədə bilər; sığorta edilmiş əmlak təbii fəlakət nəticəsində sıradan çıxada bilər çıxmayada bilər. Belə hadisələrin qanunauyğunluğunu qabaqcadan söyləməkdə seçilən riyazi model böyük rol oynayır, yəni ehtimal nəzəriyyəsi əslində təsadüfə proseslərin riyazi modelini öyrənən riyazi elmdir. Başqa sözlə, ehtimal nəzəriyyəsi riyazi modellərdə təsadüfə hadisələrin ehtimalları arasında elə əlaqə təyin edir ki, bu əlaqələr mürəkkəb hadisələrin ehtimallarını daha sadə hadisələrin ehtimalları vasitəsilə hesablamaq imkanı verir.

Eyni şəraitdə hər hansı hadisəni öyrənmək üçün ardıcıl olaraq aparılan müşahidə və təcrübələrin nəticəsi çox zaman eyni olmur. Dəyişməyən şəraitdə eyni bir cihazla aparılan ölçmələrin nəticəsi, ümumiyyətlə müxtəlif olur. Buna görə də aparılan hər bir təcrübənin və ya müşahidənin nəticəsini əvvəlcədən söyləmək çox zaman mümkün olmur.

Təsadüfə hadisənin qanunauyğunluğunu ancaq onu eyni bir şəraitdə təkrarən çoxlu sayda müşahidə etdikdə görmək olar. Buradan belə bir nəticəyə gəlirik ki, ancaq praktiki olaraq qeyri-məhdud sayda müşahidə edilə bilən hadisələri öyrənmək olar. Belə hadisələrə kütləvi hadisələr deyilir. Buna görə də ehtimal nəzəriyyəsində əsasən kütləvi hadisələr, yəni praktiki olaraq eyni şəraitdə istənilən sayda təkrar oluna bilən hadisələr öyrənilir.

Burada qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfə hadisələri öyrənmək üçün heç də onların faktiki olaraq çoxlu sayda müşahidə etməyə lüzum yoxdur. Ən sadə hadisələrin qanunauyğunluqlarını öyrənərib və bunun əsasında müvafiq nəzəriyyəni quraraq daha mürəkkəb hadisələrin, hətta praktiki olaraq bilavasitə müşahidə edilə bilməyən, lakin prinsip etibarı ilə xəyalən çoxlu sayda müşahidə edilə bilən hadisələri nəzəri olaraq öyrənmək olar. Məsələn bir uçuş üçün nəzərdə tutulmuş kosmik gəminin layihələndirilməsi prosesində bütün vasitələrin saz işləməsinə və uçuşun müvəffəq qiyətlə həyata keçməsinə əmin olmaq üçün uçuşu təmin edən vasitələrin etibarlılığını tədqiq etmək olar. Elmin gücü ondadır ki, bilavasitə müşahidələrdən alınan sadə müddəalara əsaslanaraq bilavasitə müşahidə aparmadan nəzəri üsullarla yeni faktları aşkar etmək və onların axarlı əvvəlcədən söyləmək olar.

Hər bir hadisə kimi təsadüf hadisələr də müəyən səbəblər üzündən meydana çıxır. Hadisələrin ümumi əlaqələri qanununa görə ətraf aləmdə başverən bütün hadisələr qarşılıqlı əlaqədədirlər və biri digərinə təsir edir. Ona görə də müşahidə edilən hər bir hadisə qeyri - məhdud sayda digər hadisələrlə səbəb əlaqəsindədir və onların axarı qeyri - məhdud sayda amillərdən asılıdır. Qeyri-məhdud sayda olan bu əlaqələrinin hamısını öyrənmək və onların hər birinin təsirini qiymətləndirmək ümumiyyətlə mümkün deyildir. Ona görə də bu və ya digər hadisə öyrəniləndə hadisənin axarını müəyyənədən əsas amillərlə kifayətlənirlər və kifayət qədər çoxlu sayda ikinci dərəcəli amilləri nəzərə almırlar. Bütün bunlar isə hadisənin mahiyyətini daha dərinə anlamağa və onun qanunauyğunluğunu aşkar etməyə imkan verir. Başqa sözlə öyrənilən hadisə müvafiq sadə model ilə əvəz edilir. Bunun nəticəsində elmin istənilən qanunu öyrənilən hadisənin əsas mahiyyətini əks etdirir, lakin, o, hadisənin özündən daha bəsitdir. Heç bir qanun hadisəni hərtərəfli, onun bütün müxtəlifliyi və tamlığı ilə xarakterizə edə bilməz. Qeyri – məhdud sayda nəzərə alınmayan amillərin birgə təsiri hesabına real hadisənin qanunauyğunluqdan müşahidə edilən kənarlaşmaları təsadüf hadisələrdir.

Hər hansı bir hadisənin qanunauyğunluğunu təcrübü olaraq müəyyən etmək üçün onu eyni şəraitdə təkrarən çox sayda müşahidə etmək lazımdır. Bu zaman eyni şərait dedikdə nəzarət edilən amillərin bütün kəmiyyət xarakteristikalarının eyni qiymət alması başa düşülür. Bununla belə nəzarət edilən bütün amillər müxtəlif olacaqdır. Nəticədə eyni hadisənin müxtəlif müşahidələrində nəzarət edilən amillərin təsiri praktiki olaraq eyni olacaqdır. Hadisənin qanunauyğunluğu elə burada aydınlaşır. Nəzarət edilə bilməyən amillərin təsiri hesabına qanunauyğunluqdan təsadüf kənarlaşmalar isə müxtəlif müşahidələr də müxtəlif olacaqdır. Təsadüf kənarlaşmaların konkret müşahidədə hansı qiymət alacağını prinsip etibarı ilə əvvəlcədən söyləmək mümkün deyildir.

Ehtimal nəzəriyyəsində riyaziyyat elminin bir çox sahələrində istifadə olunan üsullardan və alınan nəticələrdən (kombinator analizdə, riyazi analizdə, cəbrdə, məntiqdə və s.) geniş istifadə olunur. Ancaq ehtimal nəzəriyyəsinin sırf özünə məxsus öyrənmə üsulları vardır. Çünki onun öyrəndiyi məsələlərin əksəriyyətində dəqiq riyazi quruluş olmur və belə məsələlərin riyazi modelini qurmaqda nəzəri ehtimal intuisiyadan istifadə oluna bilər.

Ehtimal nəzəriyyəsinin analitik üsullarının işlənilib hazırlanmasında və ümumiləşdirilməsində Muavrın (1667-1754), Laplasın (1749-1827), Qausun (1821-1894), Puassonun (1781-1840), Çebişevin (1821-1894), Markovun (1856-1922), Lyapunovun (1857-1918) böyük xidmətləri olmuşdur.

Müasir ehtimal nəzəriyyəsini aksiomlar sistemi əsasında qurmağa cəhd edən S.N. Bernşteyn (1880-1948), lakin tam quran A.N. Kolmoqorov (1903-1987) olmuşdur. Bu nəzəriyyəyə inkişaf tempi verən bir sıra alimlərin, o cümlədən, Xinqinin (1894-1959), Sluskinin (1880-1948), Levinin (1886-1971) v. s. alimlərin adlarını qeyd etmək olar.

TƏSADÜFÜ SINAQLAR

Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biri təsadüf (stoxastik) sınaq anlayışıdır. Nəticəsini əvvəlcədən söyləmək mümkün olmayan sınaqlara təsadüfi sınaqlar deyilir.

Praktiki və elmi fəaliyyətin müxtəlif sahələrində çoxlu sayda təkrar edilə bilən sınaqlara və müşahidələrə rast gəlinir. Bu cür hallarda sınağın nəticələrinin müəyyən xarakteristikaları hər hansı bir əlamət üzrə müşahidə edilir və yaxud ölçülür.

Əksər hallarda bu xarakteristikalar müəyyən kəmiyyətlə ifadə edilirlər. Müəyyən hallarda isə müşahidənin nəticəsi keyfiyyət xarakteristikasına malik olur. Aydındır ki, əgər sınaq zamanı hər hansı bir obyektin rəngi müşahidə edilsə və yaxud sınaq ilə əlaqədar hadisənin baş verməsi və ya verməməsi, məhsulun keyfiyyəti müşahidə edilsə onda sınağın nəticəsi keyfiyyət xarakteristikasına malikdir. Axırncı halda şərti işarələr sistemindən istifadə etməklə sınağın nəticələrini, yəni xarakteristikaları həmişə kəmiyyətlə ifadə etmək olar.

1. Əgər sınaq zamanı zər atılırsa onda sınağın nəticəsi 1,2,...,6 rəqəmlərindən biri ilə ifadə edilir.

2. Əgər hər hansı rayonda doğulmuş uşağın cinsi müşahidə edilsə, onda hər bir müşahidənin nəticəsi bilavasitə kəmiyyətlə (müəyyən ədədlə) ifadə edilmir. Ancaq şərti olaraq oğlan doğulmasını "1"-lə, qız doğulması "0" ilə işarə etsək onda hər bir müşahidənin nəticəsi ədədlə ifadə ediləcəkdir.

Oxşar mənzərəni hadisəni idarə edən qanunlar məlum olduqda və təcrübi hesablamalarda onların istifadəsi kifayət qədər sadə olduqda da söyləmək olar.

Ancaq əksər hallarda ayrı-ayrı müşahidələrin nəticələrini əvvəlcədən söyləmək üçün bizim biliklərimiz kifayət etmir.. Bu cür sınaqlara təsadüfi sınaqlar deyilir.

Sınaq anlayışının çox geniş mənası vardır. Metal pulun döşəmə üzərinə atılması, müəyyən hədəfə atəş açılması, hər hansı fiziki kəmiyyətin ölçülməsi, nərd oyunu zərinin taxta üzərinə atılması və s. sınağa misaldır.

Hər bir sınaq müəyyən şərtlər və ya şərtlər kompleksi daxilində yerinə yetirilir. Sınağın aparılma şərtləri əvvəlcədən məlum olur və yalnız bu şərtlər ödənildikdə sınaq aparılır. Təkrarən aparılan sınaq zamanı bu şərtlər dəyişilməz qalır.

Hər bir sınaq öz aparılma şərtləri və nəticələri ilə xarakterizə olunur. Sınağın aparılma şərtləri dəyişdikdə həmin sınaq dəyişir, başqa sınaq alınır. Tutaq ki, U təkrarən aparıla bilən (əlbəttə, eyni şərtlər daxilində) sınaqdır. U sınağının hər bir icrası zamanı alınan nəticəyə hadisə deyilir. Məsələn, U sınağı tam düzgün formada olan bir zəri çox hamar səthi olan taxta üzərinə atmaqdan ibarət olduqda hadisə olaraq

1. Atıcı 4 hissəyə bölünmüş hədəfə atəş açır. Bu zaman atəş sınaqdır, hədəfin müəyyən hissəsinə düşmək isə hadisədir.

2. Qutuda rəngli şarlar vardır. Qutudan təsadüfi qaydada hər hansı şar çıxarılır. Şarın çıxarılması sınaq, şarın müəyyən rəngə malik olması isə hadisədir.

Aparılan sınaq zamanı nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilər, verməyə də bilər.

Sınağın hər bir icrasında hökmən baş verən hadisəyə yəqin hadisə deyilir. Sınağın heç bir icrasında baş verməyən (və ya hökmən baş verə bilməyən) hadisəyə mümkün olmayan hadisə deyilir.

Nəhayət, sınağın icrası zamanı nəzərdə tutulan hadisə baş verə də bilirsə, verməyə də bilirsə, yəni sınaq zamanı həmin hadisənin baş verib-verməməsi haqqında qabaqcadan heç nə demək mümkün deyildirsə, onda həmin hadisəyə təsadüf hadisə deyilir.

Əlbəttə, hər bir hadisənin müəyyən bir sınağa nəzərən (yəni aparılan müəyyən bir sınaq nəticəsində) yəqin, mümkün olmayan, təsadüfi olmasından danışmaq olar. Bir sınağa nəzərən yəqin, mümkün olmayan və təsadüfi olan hadisə başqa bir sınağa nəzərən başqa xarakterli ola bilər.

ELEMENTAR HADİSƏLƏR FƏZASI.

Tutaq ki, təkrarən aparıla bilən hər hansı U sınağının icrasında cüt-cüt uyuşmayan $\omega_i (i=1,2,...)$ nəticələrindən ancaq biri baş verir. Bu halda, ω_i nəticələrinin hər biri U sınağının elementar hadisəsi (və ya elementar nəticəsi) adlanır. Bütün belə elementar hadisələr çoxluğuna U sınağının elementar hadisələr fəzası deyilir və Ω ilə işarə olunur: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

Həyatda istənilən sayda təkrarən aparıla bilən müxtəlif sınaqlar və onların elementar nəticələri vardır. Bunların hər birini ayrılıqda öyrənməyin heç bir elmi əhəmiyyəti yoxdur. Buna görə də ehtimal nəzəriyyəsində konkret elementar hadisələr və elementar hadisələr fəzası deyil, ümumi (abstrakt) elementar hadisələr fəzası öyrənilir.

Ümumiyyətlə, ixtiyari təbiətli ω elementlərinin Ω çoxluğu elementar hadisələr fəzası, onu təşkil edən ω elementləri isə elementar hadisələr adlanır. Hər bir real hadisə və prosesi öyrənmək üçün uyğun elementar hadisələr fəzası təyin edilir. Baxılan sınağın cüt-cüt uyuşmayan uyğun nəticələri isə elementar hadisələr hesab olunur.

Hadisə anlayışı ümumi halda da uyğun şəkildə təyin edilir. Elementar hadisələr fəzasının hər bir alt çoxluğuna təsadüf hadisə və ya sadəcə olaraq hadisə deyilir. Aparılan sınaqda müəyyən hadisənin baş verməsi, onu təşkil edən elementar hadisələrin heç olmasa birinin baş verməsi deməkdir. Beləliklə, baxılan sınaq nəticəsində baş verə bilən bütün hadisələr çoxluğu Ω fəzasının bütün altçoxluqları çoxluğundan ibarətdir. Ω çoxluğundan ibarət olan hadisə, sınaq nəticəsində baş verən hər bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verir. Deməli, Ω fəzası yəqin hadisədir. Boş çoxluq isə sınağın icrası zamanı heç bir elementar hadisənin baş verməsi nəticəsində baş verə bilməz, yəni $\emptyset$ boş çoxluğu mümkün olmayan hadisədir.

Qeyd edək ki, hər bir elementar hadisəyə Ω fəzasının bir elementli altçoxluğu kimi baxmaq olar. Buna görə də Ω fəzasını təşkil edən elementar hadisələrin hər biri təsadüf hadisədir.

n sayda elementdən ibarət olan sonlu çoxluğun 2^n əsyda alt çoxluğu vardır. Doğrudan da, bu çoxluğun k elementli müxtəlif altçoxluqlarının sayı C_n^k olduğundan $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ olar.

Buradan aydın olur ki, elementar hadisələr fəzası 2^n sayda hadisə ilə bağlıdır. Bu hadisələrdən biri yəqin hadisə (fəzanın özü), o biri isə mümkün olmayan hadisədir (boş çoxluq). Hər bir prosesə uyğun elementar hadisələr fəzası vardır.

Sınağın nəticələri əsasında elementar hadisələrin iki çoxluğunu qurmaq olar: $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $\Omega_2 = \{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}\}$. Ω_1, Ω_2 -yə nisbətən baxılan sınağın formal modelinə

daha uyğun gəlir. Belə ki, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, A, B, D, E$ hadisələri Ω_2 çoxluğunun alt çoxluqları deyillər. Digər tərəfdən bu hadisələrin hər biri Ω_1 çoxluğunun alt çoxluğu kimi təsvir edilə bilər. Doğrudan da, $A = \{\omega_3, \omega_6\}; B = \omega^{(1)} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}; C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}; D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega_1; E = \emptyset; F = \{\omega_1\}$

Bu bərabərliklərdən aydın olur ki, $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ sınağın nəticələri olan elementlərin ayrılışıdır. Deməli, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ nəticələri $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ nəticələrinə nisbətən daha "bəsitdir."

Hadisələri cüt-cüt müqayisə edərək, onların ümumi elementlərini müəyyən etməklə uyuşan və uyuşmayan hadisələr cütlərini təyin edə bilərik:

$AB = \{\omega_3\}; AC = \{\omega_6\}; AD = \{\omega_3, \omega_6\}; AE = \emptyset; AF = \emptyset; BC = \{\omega_5\}; BD = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}; BE = \emptyset; BF = \{\omega_1\}; CE = \emptyset; DF = \{\omega_1\}; CD = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}; EF = \emptyset$

Deməli, $A \vee B, A \vee C, A \vee D, B \vee C, B \vee D, B \vee F, C \vee D, D \vee F$ hadisələri uyuşan, $A \vee E, A \vee F, B \vee E, C \vee E, E \vee F$ hadisələri isə uyuşmayan hadisələrdir.

TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏR

HADİSƏLƏR ARASINDA DAXİLƏLMƏ VƏ EYNİGÜCLÜLÜK MÜNASİBƏTLƏRİ.

Tutaq ki, Ω - müəyyən U sınağının elementar hadisələr fəzasıdır. Bu sınaq ilə əlaqədar bütün hadisələr çoxluğunu, yəni Ω - nın altçoxluqları sinfini $S(\Omega)$ ilə işarə edək.

Fərz edək ki, A hadisəsi baş verdikdə B hadisəsi həkmən baş verir. Bu halda A hadisəsi B hadisəsini doğurur deyirlər və bunu $A \subset B$ kimi yazırlar. $\subset$ - daxilolma münasibəti adlanır. Tərifə görə

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega: \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

Məsələn, bir dəfə atılan zərdə 2, 4, 6 xallarına uyğun üzlərdən hər hansı birinin düşməsi hadisəsi düşən üzdə cüt rəqəmin olması hadisəsini doğurur. Bir elementli A və B hadisəsi üçün $A \subset B$ təklifi $\omega \in B$ təklifi ilə eynigüclüdür. Daxilolma münasibəti aşağıdakı xassələrə malikdir.

$$A \in A, \emptyset \in A, A \in \Omega, A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

$A \subset B, B \subset A$ olduqda A və B hadisələri eynigüclü hadisələr adlanır və bu fakt $A = B$ kimi yazılır. Tərifə görə

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Eynigüclülük münasibəti ekvivalentlik münasibətidir, yəni o, simmetriklik, refleksivlik və tranzitivlik xassələrinə malikdir:

$$A = A, A = B \Rightarrow B = A, A = B, B = C \Rightarrow A = C$$

Məhz bu mənada eynigüclü hadisələri birləşdirərək bir hadisə kimi baxmaq olar.

HADİSƏLƏRİN HASILI.

A və B hadisələrinin hasili elə hadisəyə deyilir ki, o ancaq və ancaq A və B birlikdə baş verdikdə yerinə yetir. A və B hadisələrinin hasili $A \cap B$ və ya AB ilə işarə

edilir. Buradan aydın olur ki, AB hasili həm A hadisəsinə həm də B hadisəsinə daxil olan elementar hadisələrdən ibarətdir, yəni

$$AB = (\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \in B)$$

n sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin hasili

$$\prod_1^n A_i = (\omega \in \Omega : \forall n : \omega \in A_n)$$

bərabərliyi ilə verilən hadisəyə deyilir.

Vurma əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. $AB = BA$

2. $(AB)C = A(BC) = ABC$

3. $AA = A$

4. $A\Omega = A, A\emptyset = \emptyset$

5. $\prod A_i \subset A_k$

HADİSƏLƏRİN BİRLƏŞMƏSİ.

A və B hadisələrinin birləşməsi elə hadisəyə deyilir ki, o ancaq və ancaq A və B -dən heç olmasa biri yerinə yetdikdə baş verir. A və B hadisələrinin birləşməsi $A \cup B$ ilə işarə edilir. Deməli $A \cup B$ birləşməsi A və B hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan elementar hadisələrdən ibarətdir. Yəni,

$$A \cup B = (\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B)$$

Anoloji olaraq

$$\bigcup_1^n A_i = (\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \vee \omega \in A_2 \vee \dots \vee \omega \in A_n)$$

bərabərliyi ilə verilən hadisəyə $A_1, \dots, A_n$ hadisələrinin birləşməsi deyilir. Birləşmə əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. $A \cup B = B \cup A$

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

3. $A \cup A = A$

4. $A \cup \emptyset = A, A \cup \Omega$

HADİSƏLƏRİN FƏRQİ VƏ TAMAMLAMA ƏMƏLİ.

A və B hadisələrinin fərqi

$$A - B = (\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B)$$

bərabərliyi ilə verilən hadisəyə deyilir. Deməli, $A - B$ fərqi A -nın baş verməsi, B -nin isə baş verməməsi hadisəsidir. A hadisəsinin baş verməməsi hadisəsi A -nın tamamlayanı (əksi) adlanır və $\bar{A}$ kimi işarə olunur.

Aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

1. $(A \cup B)C = AC \cup BC$
2. $(AB)C = (A \cup C)(B \cup C)$
3. $A \cup (AB) = A, A(A \cup B) = A$
4. $\bigcup_i A_i$
4. $\bigcup_i A_i = \prod_i A_i$
5. $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$
6. $C \subset A, C \subset B \Leftrightarrow C \subset AB$
7. $A \subset C, B \subset C \Leftrightarrow (A \cup B) \subset C$

HADİSƏLƏRİN TAM SİSTEMİ.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələr sistemi aşağıdakı üç şərti ödədikdə tam sistem adlanır:

$$1. A_i \neq \emptyset, i \geq 1$$

$$2. A_i A_j = \emptyset, i \neq j$$

$$3. \bigcup_1^\infty A_i = \Omega$$

2-ci və 3-cü şərtləri ödəyən hadisələr uyğun olaraq uyuşmayan və yeganə mümkün adlanır.

Uyuşmayan hadisələrin birləşməsinə bu hadisələrin cəmi deyilir və bunu

$$\sum_i A_i = A_1 + A_2 + \dots$$

kimi işarə edirlər.

Əgər A hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmidirsə, yəni

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

münasibəti ödənilirsə, onda deyirlər ki, A hadisəsi $A_1, A_2, \dots, A_n$ xüsusi hallarına ayrılır.

Aşağıdakı düstur hadisələrin birləşməsinə onların cəmi ilə ifadə etməyə imkan verir:

$$\bigcup_{i \geq 1} A_i = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \dots$$

İsbatı. Aşağıdakı hadisələrə baxaq:

$$B_1 = A_1, B_i = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{i-1} A_i, i \geq 2$$

İxtiyari i və j indeksləri üçün goğru olan

$$i < j \Rightarrow B_i \subset A_i \wedge B_j \subset \bar{A}_i$$

münasibətindən $B_i B_j = \emptyset, i < j$ alırıq. Burada i və j eynii hüquqlu olduğuna görə,

$B_i B_j = \emptyset, i < j$ olar. Deməli, $B_1, B_2, \dots$ uyuşmayan hadisələrdir. $B_i \subset A_i \Rightarrow \sum_{i \geq 1} B_i \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i$

İndi fərz edək ki, $\omega \in \bigcup_{i_1} A_{i_1}$ -dir. $A_1 - A_n, n \geq 1$ ardıcılığında ω -nı öz daxilinə alan berinci

hadisədir. Onda $\omega \in B_i \Rightarrow \omega \in \bigcup_{i > 1} B_i \Leftrightarrow \bigcup_{i > 1} A_i \subset \bigcup_{i > 1} B_i$

HADİSƏLƏR ARDICILLIĞI VƏ ONUN LİMİTİ

$A_n, n \geq 1$ hadisələr ardıcılığı :

- a) $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ şərtini ödədikdə artan,
- b) $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ şərtini ödədikdə azalan,
- c) artan və ya azalan olduqda monoton
- d) $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ və $\bigcap A_i = \emptyset$ şərtlərini ödədikdə isə yox olan ardıcılıq adlanır.

Tutaq ki, $A_n, n \geq 1$ hadisələr ardıcılığıdır. A^* ilə A_n -lərin qeyri məhdud saydasının başverməsi hadisəsini işarə edək. Asanlıqla görmək olar ki,

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Doğrudan da, $\omega \in A^*$ olduqda yəni ω qeyri məhdud sayda A_n -lərə daxil olduqda istənilən n üçün $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ olar. Beləliklə, $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Bu isə o deməkdir ki, $A^* \subset A^* \subset$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Əksinə $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ olduqda $\omega \in A^*$ olar.

Tutaq ki, A_* müəyyən nömrədən sonra bütün A_n -lərin başverməsi, yəni yalnız sonlu sayda A_n -lərin başverməməsi hadisəsidir. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

.Aydın ki, $A_* \subset A^*$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ və $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ hadisələrinə uyğun olaraq $A_n, n \geq 1$ hadisələr ardıcılığının yuxarı və aşağı limiti deyilir.

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A$ olduqda $A_n, n \geq 1$ ardıcılığına yığılan ardıcılıq, A hadisəsinə isə onun limiti deyilir.

Tərifə görə $A_n, n \geq 1$ ardıcılığı A hadisəsinə yalnız və yalnız o zaman yığılır ki, hər bir $\omega \in A$ elementar hadisəsi sonlu saydası müstəsna olmaqla $A_n, n \geq 1$ hamısına, hər bir $\omega \notin A$ isə yalnız sonlu sayda A_n -lərə daxil olmasın.

Tutaq ki, $A_n, n \geq 1$ monoton artan ardıcılıqdır, yəni $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$. Onda $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Bu isə o deməkdir ki, $A_n, n \geq 1$ ardıcılığı yığılandır və

$$A_n \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, n \rightarrow \infty$$

$A_n, n \geq 1$ monoton azalan ardıcılıq, yəni $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ olduqda

$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, A_* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Beləliklə, $A_n, n \geq 1$ hadisələr ardıcılığı yığılandır və

Cəbr və σ -cəbr anlayışları

Tutaq ki, Ω , U sınağı ilə bağlı elementar hadisələr fəzasıdır. Ehtimal nəzəriyyəsində ehtimala hadisələrin funksiyası kimi baxılır. Lakin Ω fəzasının istənilən altçoxlğu üçün ehtimalı təyin etmək mümkün deyildir. Ehtimal anlayışı fəzanın müəyyən hadisələri (altçoxlqları) sisteminə daxil olan hadisələr (çoxlqlar) üçün təyin edilir. Buna görə də hadisələrin ehtimalını riyazi olaraq təyin etmək üçün belə hadisələr sistemi əvvəlcədən müəyyən edilməlidir.

Tutaq ki, Ω fəzasının hər hansı hadisələr (altçoxlqları) sistemi F ilə işarə edilmişdir və bu sistem üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$1. \Omega \in F$$

$$2. A \in F, B \in F \Rightarrow AB \in F, A + B \in F, A - B \in F$$

olur. Onda F sisteminə hadisələr cəbri deyilir.

Hadisələr cəbrinin bir sıra xassələri vardır. Ω fəzası F sisteminə daxil olduğundan 2-ci şərtə görə $\emptyset = \Omega - \Omega$ boş çoxluğu da F sisteminə daxildir. Hadisələrin cəmi və fərqi üçün qruplaşdırma xassəsi doğru olduğundan F sisteminə daxil olan sonlu sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmi və hasili də həmin sistemə daxildir:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \in F, \bigcap_{k=1}^n A_k \in F$$

Bir çox məsələləri həll etmək üçün ehtimal nəzəriyyəsində hadisələr cəbri anlayışı ilə kifayətlənmək olar. Lakin bir sıra mürəkkəb məsələləri həll etmək üçün hadisələr cəbrinin əlavə bir xassəni də ödəməsi tələb edilir. Bu xassə, sistemin hesabi sayda hadisələrin cəmi və hasilinin yenə də həmin sistemə daxil olmasından ibarətdir:

$$3) \bigcup_{k=1}^n A_k \in F, \bigcap_{k=1}^n A_k \in F$$

Bu halda, yəni F hadisələr cəbri 3) şərtini ödədikdə, ona σ -cəbr və yaxud Borel cəbri deyilir.

F sisteminə daxil olduğundan 2-ci şərtə görə $\emptyset = \Omega - \Omega$ boş çoxluğu da F sisteminə daxildir. Hadisələrin cəmi və fərqi üçün qruplaşdırma xassəsi doğru olduğundan F sisteminə daxil olan sonlu sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmi və hasili də həmin sistemə daxildir:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \in F, \bigcap_{k=1}^n A_k \in F$$

Tutaq ki, S Ω -nın müəyyən alt çoxluqları sistemidir:

$$1) S \subset \sigma(S)$$

$$2) S \subset F \text{ şərtini ödəyən istənilən } F \text{ } \sigma\text{-cəbri üçün } \sigma(S) \subset F \text{ olarsa}$$

$\sigma(S)$ -ə S sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik σ -cəbr deyilir.

Teorem 1. İstənilən S çoxluqlar sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik $\sigma(S)$ cəbri vardır.

İsbatı. Əvvəlcə qeyd edək ki, S sinfini öz daxilində saxlayan heç olmasa bir σ -cəbr vardır. Məsələn, belə bir cəbr olaraq Ω -nın bütün altçoxlqları sinfini götürmək olar. S sinfini öz daxilində saxlayan bütün σ -cəbrlərin kəsişməsini $\sigma(S)$ ilə işarə edək. Onda

$\sigma(S)$ -də σ -cəbr olar. S sinfini öz daxilində saxlayan istənilən F σ -cəbri üçün $\sigma(S) \subset F$ olar. Beləliklə, $\sigma(S)$, S sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik σ -cəbrdir.

Teorem 2. S cəbrinin σ -cəbr olması üçün onun monoton sinif olması zəruri və kafidir.

Zərurilik. S cəbri σ -cəbr olduqda o, eyni zamanda monoton sinifdir.

Kafilik. Tutaq ki, S cəbri monoton sinifdir. Göstərək ki, $A_n \in S$ olduqda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ olar.

$B_m = \bigcup_{i=1}^m A_i$ işarə edək. Aydındır ki, $B_m \subset B_{m+1}$. S cəbr olduğu üçün $B_m \in S$. S eyni zamanda monoton sinif olduğu üçün $B_m \rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \in S$ olar.

S sinfini öz daxilində saxlayan $M(S)$ monoton sinfi:

1) $S \subset M(S)$;

2) S sinfini öz daxilində saxlayan istənilən M monoton sinfi üçün $M(S) \subset M$

şərtləri ödənildikdə $M(S)$ monoton sinfi S sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinif adlanır.

Teorem 3. İstənilən S sinfi üçün onu öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinif vardır.

İsbatı. S sinfini öz daxilində saxlayan heç olmasa bir monoton sinif vardır. Məsələn, belə bir sinif olaraq Ω -nın bütün altçoxluqları sinfini götürmək olar. S sinfini öz daxilində saxlayan bütün monoton siniflərin kəsişməsini $M(S)$ ilə işarə edək. Monoton siniflərin kəsişməsi də monoton sinif olduğu üçün $M(S)$ monoton sinifdir. S sinfini öz daxilində saxlayan istənilən M monoton sinfi üçün $M(S) \subset M$ olar. Beləliklə, $M(S)$ S sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik monoton sinifdir.

Bölmə 2. EHTİMALIN XÜSUSİ VƏ AKSİOMATİK TƏRİFLƏRİ. EHTİMALIN STATİSTİK TƏRİFİ

Fərz edək ki, U təkrarən aparıla bilən sınaq, Ω bu sınağın elementar hadisələr fəzası və A təsadüfi hadisədir. U sınağını n dəfə apardıqda A hadisəsinin baş verməsi sayını m ilə işarə edək. Başqa sözlə, m ədədi n sınaqda A hadisəsinin baş verdiyi sınaqların sayıdır. Onda

$$t_n(A) = \frac{m}{n}$$

nisbətinə n sınaqdan ibarət seriyada A hadisəsinin başvermə tezliyi deyilir.

Bir çox hallarda hadisənin tezliyini başqa bir hadisənin başverməsi şərti daxilində hesablamaq lazım gəlir. A hadisəsinin tezliyini B hadisəsinin başverməsi şərtində hesabladıqda bütün sınaqları deyil, ancaq B hadisəsi başverən sınaqları nəzərə almaq lazımdır.

Tutaq ki, aparılan n sayda sınaqda B hadisəsi m dəfə baş vemişdir. m sayda sınaqda isə A hadisəsi k başvermişdir. Onda A hadisəsinin B hadisəsinin başverməsi

şərtində tezliyi $\frac{k}{m}$ nisbəti kimi hesablanır. Bu tezlik bir qayda olaraq A hadisəsinin tezliyindən fərqlənir. Bu tezliyə B hadisəsinin başverməsi şərtində A hadisəsinin nisbi tezliyi deyilir.

$$t_n(A/B) = \frac{k}{n}$$

Müəyyən U sınağının təkrarı olan sınaqların müxtəlif seriyalarına baxaq. Fərz edək ki, i -ci seriya n_i sayda sınaqdan ibarətdir və bu seriyada A hadisəsi m_i dəfə başvermişdir. Onda bu seriyada A hadisəsinin başvermə tezliyi

$$t_{n_i}(A) = \frac{m_i}{n_i}, i \geq 1$$

olar.

Aparılan sınaqlar göstərir ki, hadisələrin tezliyi aşağıdakı dayanıqlıq xassəsinə malikdir:

Baxılan A hadisəsinin hər biri kifayət qədər çoxlu sayda sınaqdan ibarət olan müxtəlif seriyalardakı tezlikləri bir-birindən olduqca az fərqlənir və müəyyən bir sabit ədəd ətrafında ehtizaz edir.

Tezliyin dayanıqlıq xassəsindən belə nəticə alınır: U sınağı ilə əlaqədar hər bir A hadisəsi üçün elə bir $P(A)$ ədədi vardır ki, U sınağını küllü miqdarda təkrarən apardıqda A -nın tezliyi təxminən $P(A)$ ədədinə bərabər olur. Bu ədədə A hadisəsinin statistik ehtimalı deyilir.

Tərifə görə, A hadisəsinin statistik ehtimalı p ədədi olarsa, onda n dəfə təkrar olunan sınaqda bu hadisə demək olar ki, np dəfə baş verir.

Tezliyin xassələri. Fərz edək ki, U müəyyən sınaq, A və B isə bu sınaq ilə əlaqədar hadisələrdir. Hadisənin tezliyi aşağıdakı xassələrə malikdir:

- 1) İstənilən hadisənin tezliyi mənfi olmayan və vahidi aşmayan ədəddir. Mümkün olmayan hadisənin tezliyi sıfır, yəqin hadisənin tezliyi isə vahidə bərabərdir:

$$0 \leq t_n(A) \leq 1, t_n(\emptyset) = 0, t_n(\Omega) = 1$$

- 2) Uyuşmayan hadisələrin cəminin tezliyi onların tezlikləri cəminə bərabərdir.

$$t_n(A+B) = t_n(A) + t_n(B)$$

- 3) İki hadisənin hasilinin tezliyi onlardan birinin tezliyi ilə digərinin şərti tezliyi hasilinə bərabərdir.

$$t_n(AB) = t_n(B)t_n(A/B)$$

Doğrudan da, tutaq ki, n sınaqda A hadisəsi m dəfə, B hadisəsi k dəfə, A və B hadisələri birlikdə l dəfə başvermişdir. Onda A və B hadisələrinin birgə başvermə tezliyi $\frac{l}{n}$, B hadisəsinin tezliyi $\frac{k}{n}$, A hadisəsinin B hadisəsinin başverməsi şərtində tezliyi $\frac{l}{k}$ olar:

$$\frac{l}{n} = \frac{k}{n} \frac{l}{k}$$

Bu isə o deməkdir ki, $t_n(AB) = t_n(B)t_n(A/B)$

n kifayət qədər böyük olduqda tezliyin dayanıqlıq xassəsinə görə $P(A)$ ehtimalından olduqca az fərqlənir. Buna görə də tezliyin yuxarıda göstərilən xassələrinin ehtimal üçün də ödənildiyini qəbul etmək təbiidir.

Beləliklə, statistik ehtimal

$$P(A) \geq 0, P(\Omega) = 1, P(A + B) = P(A) + P(B)$$

xassələrinə malikdir.

Diskret elementar hadisələr fəzasında ehtimalın təyini.

Klassik ehtimalın təyini. Klassik sxem.

Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə deyirlər ki, verilmiş sınağın (Ω, P) ehtimal modeli qurulmuşdur:

a) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ elementar hadisələr fəzası təyin edilmişdir;

b) hər bir ω_i elementar hadisəsinə $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ şərtlərini ödəyən p_i ehtimalı qarşı qoyulmuşdur.

Sonlu sayda $\omega_1, \dots, \omega_n$ nəticələri olan sınağın ehtimal modelini quraq. Bu modellərdən ən sadəsi “Klassik ehtimal sxemi” adlanır. Bu sxemdə ehtimalın təyini sonlu sayda nəticələrdən hər birinin “eyniimkanlı” (eyni ehtimallı) olmasını nəzərdə tutulur. $n(A)$ ilə A hadisəsini təşkil edən elementar hadisələrin sayını işarə edək. Onda

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

nisbətinə A hadisəsinin klassik ehtimalı deyilir.

Beləliklə, eyniehtimallı sonlu elementar hadisələr fəzasında ixtiyari hadisənin ehtimalı, bu hadisəyə daxil olan elementar hadisələrin sayının elementar hadisələrin ümumi sayına nisbətinə bərabərdir.

$\omega_i \in \Omega$ elementar hadisələrini mümkün hallar, A hadisəsini təşkil edən elementar hadisələri isə bu hadisə üçün əlverişli hallar adlandırırlar. Deməli, A hadisəsinin ehtimalı bu hadisə üçün əlverişli olan halların ehtimalları cəminə bərabərdir. Əgər elementar hadisələr eyniehtimallı olarsa, onda hadisənin ehtimalı surəti bu hadisə üçün əlverişli olan halların sayına, məxrəci isə bütün mümkün halların sayına bərabər olan kəsrdir.

Ehtimalın klassik tərifindən aydın olur ki, elementar hadisələrin hamısının daxil olduğu Ω yəqin hadisəsinin ehtimalı vahidə bərabərdir:

$$P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$$

Teorem 1. Uyuşmayan $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}, B = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$ hadisələrinin birləşməsinin ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir.

İsbatı. Doğrudan da, A və B hadisələrinin ehmalları müvafiq olaraq $\frac{m}{n}$ və $\frac{k}{n}$ - ə bərabərdir:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(B) = \frac{k}{n}$$

$C = A \cup B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}, \dots, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$ hadisəsi $m + k$ sayda elementar hadisələrdən ibarətdir və $\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$ elementar hadisələrindən heç biri $\{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$ çoxluğuna daxil deyildir. Ona görə də klassik ehtimalın tərinə əsasən

$$P(C) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B)$$

Bu teoremə klassik ehtimal üçün ehtimalların toplanması qanunu da deyilir.

Nəticə 1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Döğrudan da, A və $\bar{A}$ hadisələri uyuşmayan hadisələr, onların birləşməsi isə yəqin hadisədir:

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

Ehtimalların toplanması qanununa görə

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Buradan isə $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ olur.

Mümkün olmayan hadisə yəqin hadisənin tamamlayanı olduğu üçün buradan xüsusi halda mümkün olmayan hadisənin klassik ehtimalının sıfıra bərabər olduğu alınır.

Qutu sxemi.

Elementar hadisələrin eyniehtimallı və sonlu sayda olması tələbləri klassik ehtimalın tətbiqini məhdudlaşdırır. Bir çox hallarda elementar hadisələrin eyniehtimallı olmasını təyin etmək çox çətin olur. Bəzən də xarici görünüşcə oxşar olan müxtəlif elementar hadisələrə bir hal kimi baxılması səhvinə yol verilir. Göstərilən nöqsanlarla yanaşı klassik ehtimal özünün sadəliyi ilə fərqlənir və onu tətbiq etmək üçün kombinator analizin bəzi düsturlarını bilmək kifayətdir.

Klassik sxemin tətbiqinin məhdudluğuna baxmayaraq o, bir sıra vacib praktiki məsələlərin həllində geniş surətdə istifadə edilir. N sayda elementdən ibarət çoxluğa baxaq. Bu çoxluğun təbiəti bizi maraqlandırmır. O, müəyyən əlamətə malik və malik olmayan - məsələn, keyfiyyətli və keyfiyyətsiz məmularlar çoxluğu, hər biri nəmli və yaxud nəmişli olan toxumlar çoxluğu və s. ola bilər. Bu cür hallar qutu sxemi vasitəsilə təsvir edilir:

Qutuda M sayda ağ, $N - M$ sayda isə qara şar vardır. Bəzi hallarda məmulatın keyfiyyətini yoxladıqda o, sıradan çıxır. Məsələn, məhsulun keyfiyyətinə nəzarəti həyata keçirərkən nəzarət əməliyyatı nəticəsində məhsul satış üçün yararsız hala düşür. Bu halda məmulatların hamısının deyil, onların müəyyən hissəsinin keyfiyyəti yoxlanılır. Tutaq ki, qutudan təsadüfə qaydada n şar çıxarılmışdır. Çıxarılan şarlardan m sarın ağ şar olması hadisəsinin ehtimalını hesablayaq. N şardan n şarı C_N^n üsulla seçmək olar. Deməli, mümkün halların sayı C_N^n -dir. Çıxarılan şarlardan m şarın ağ şar olması hadisəsi (A) üçün

əlverişli halların sayını tapaq. M ağ şardan m şarı C_M^m üsulla, $N - M$ qara şardan isə $n - m$ şarı C_{N-M}^{n-m} üsulla seçmək olar. Onda əlverişli halların sayı $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ olar. Beləliklə, klassik ehtimalın tərifinə görə axtarılan ehtimal

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

olar

Sonlu və yaxud hesabi sayda nəticələri olan sınağın ehtimal modeli. Diskret sxemlər.

Sınağın nəticələri sonlu sayda olduqda ona sonlu, sonlu və yaxud hesabi sayda olduqda isə diskret sxem deyilir.

Nəticələri eyniimkanlı olmayan sonlu sxemin ehtimal modelini quraq. Bu halda sınağın nəticələri sonlu sayda elementar hadisələrindən ibarət $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ coxluğudur. Bu model hər bir $\omega_i \in \Omega$ elementar hadisəsinə $p_i \geq 0$ və $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ şərtlərini ödəyən $p_i = P(\omega_i)$ ehtimalının qarşı qoyulması ilə təyin edilir.

Tutaq ki, A - sınaq zamanı müşahidə edilən istənilən hadisədir. Bu hadisəsinin ehtimalı onu təşkil edən elementar hadisələrin ehtimalları cəmi kimi təyin edilir:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

Məsələn, $A = (\omega_1, \omega_3, \omega_5)$ olduqda

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_3) + P(\omega_5)$$

Qurulmuş model sonlu sayda eyniimkanlı nəticələri olan klassik sxemin ehtimal modelinin ümumiləşməsidir. Belə ki, hər bir ω_i elementar hadisəsinin ehtimalını $\frac{1}{n}$ kimi təyin etsək ehtimalın klassik tərifini alarıq.

Sonlu sxemlər üçün də ehtimalların toplanması qanunu doğrudur.

Teorem 2. $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}, B = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$ uyuşmayan hadisələr olduqda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

İsbatı. Tərifə görə $P(A) = \sum_{l=1}^m p_{i_l}, P(B) = \sum_{s=1}^k p_{j_s}$. A və B hadisələri uyuşmayan olduğu üçün onların ortaq elementar hadisələri yoxdur.

$$C = A \cup B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}, \dots, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$$

olar.

Deməli,

$$P(C) = P(A \cup B) = \sum_{l=1}^m p_{i_l} + \sum_{s=1}^k p_{j_s} = P(A) + P(B)$$

Teorem 3. İstənilən A və B hadisələri üçün

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

İsbatı. $P(A+B)$ ehtimalı A və B hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan elementar hadisələrin ehtimalları cəmidir. Bu zaman elementar hadisə eyni zamanda A və B -yə daxil olduqda bir dəfə götürülür. Ona görə də

$$P(A+B) \leq P(A) + P(B)$$

Elementar hadisə eyni zamanda A və B -yə daxil olduqda o, axırıncı bərabərsizliyin sağ tərəfinə iki, sol tərəfinə isə bir dəfə daxil olur. Ona görə də sağ tərəf sol tərəfdən $P(AB)$ qədər böyükdür. Beləliklə,

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

İndi isə hesabi sayda $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ nəticələri olan təsadüfi sınağa baxaq. Bu halda elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ olar. Diskret sxemin ehtimal modelində hər bir $\omega_i \in \Omega$ elementar hadisəsinə $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ şərtlərini ödəyən $p_i = P(\omega_i)$ qarşı qoyulur.

Hesabi sayda elementar hadisələrdən ibarət olan A hadisəsinin ehtimalı isə klassik sxemdə olduğu kimi onu təşkil edən elementar hadisələrin ehtimalları cəmi kimi təyin edilir.

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Bu qayda ilə təyin edilmiş ehtimal aşağıdakı xassələrə malikdir.

$$a) 0 \leq P(A) \leq 1,$$

$$b) P(\Omega) = 1.$$

$$c) A \subset \Omega, B \subset \Omega$$

uyuşmayan hadisələr olduqda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Doğrudan da,

$$0 \leq P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

$$P(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Diskret sxem sonlu sxemin ehtimal modelinin ümumiləşməsidir.

Ehtimal nəzəriyyəsi ω_i elementar hadisəsinin p_i ehtimalının hesablanmasını öyrənmir. Bu ehtimalların təyininə elementar hadisənin müxtəlif seriyalardakı küllü miqdarda aparılmış sınaqlarda tezliyi əsas götürülür. Eyni zamanda ehtimal nəzəriyyəsi (Ω, P) ehtimal modelinin adekvatlığını da öyrənmir. O, ancaq qurulmuş (Ω, P) modeli ilə bağlı hadisələrin ehtimalının hesablanmasını öyrənir.

Sonlu və hesabi- additiv ehtimal ölçüləri.

Tutaq ki, S Ω -nın müəyyən alt çoxluqlarının cəbridir. Ω -da təyin edilmiş $P(\cdot)$ çoxluq funksiyası

$$1) P(A) \geq 0, A \in S,$$

$$2) P(\Omega) = 1.$$

$$3) P(A \cup B) = P(A) + P(B), A, B \in S, AB = \emptyset$$

şərtlərini ödədikdə ona sonlu-additiv ehtimal ölçüsü deyilir.

3)-cü xassədən riyazi induksiya metodunun köməyi ilə istənilən $A_i \in S, i = 1, 2, \dots, m$ hadisələri üçün $A_i A_j = \emptyset, i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, m$ olduqda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m P(A_i)$$

olduğunu almaq olar.

$A \cup \bar{A} = \Omega$ olduğu üçün 2) və 3) –cü xassələrə əsasən

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

və yaxud

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

olduğunu yazı bilərik.

S cəbrində təyin edilmiş $P(\cdot)$ çoxluq funksiyası

$$1) P(A) \geq 0, A \in S;$$

$$2) P(\Omega) = 1;$$

$$3) P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$A_i \in S, i = 1, 2, \dots; A_i A_j = \emptyset, i \neq j; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

şərtlərini ödədikdə ona hesabi-additiv ehtimal ölçüsü deyilir.

Hansı şərtlər daxilində sonlu-additiv ehtimal ölçüsünün hesabi-additiv olmasına aşağıdakı teorem cavab verir.

Teorem 4. Tutaq ki, $P(\cdot)$ F σ -cəbrində sonlu -additiv ehtimal ölçüsüdür. Onda aşağıdakı dörd şərt ekvivalentdir.

1) $P(\cdot)$ hesabi-additivdir, yəni $A_i \in F, i = 1, 2, \dots, A_i A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ olduqda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

2) $A_i, i = 1, 2, \dots$, azalmayan çoxluqlar ardıcılığı və $\lim A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ olduqda

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim P(A_n)$$

3) $A_i, i = 1, 2, \dots$, artmayan çoxluqlar ardıcılığı və $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ olduqda

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim P(A_n)$$

4) $P(\cdot)$ Ω -da kəsilməyəndir, yəni $A_i \supset A_{i+1}$ və $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ olduqda

$$\lim P(A_n) = 0$$

İsbati. Teoremin isbatını aşağıdakı ardıcılıqla verək: $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$. Buradan isə 1), 2), 3), 4) şərtlərinin ekvivalentliyi alınır.

1) $\Rightarrow$ 2). Tutaq ki, $A_i, i=1,2,\dots$, azalmayan çoxluqlar ardıcılığıdır. 1)-dən

$$P(\lim A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim \sum_{i=1}^{n-1} P(B_i) = \lim P(A_n)$$

alınır.

Beləliklə, 1)-dən 2) alınır.

İsbat edək ki, 2)-dən 3) alınır. Tutaq ki, $A_i, i=1,2,\dots$, artmayan çoxluqlar ardıcılığıdır. Onda $\bar{A}_i$ azalmayan çoxluqlar ardıcılığıdır. 2)-yə görə

$$\begin{aligned} P(\lim A_n) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i\right) = \\ &= 1 - \lim P(\bar{A}_n) = \lim (1 - P(\bar{A}_n)) = \lim P(A_n) \end{aligned}$$

İsbat edək ki, 3)-dən 4) alınır. $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0$ olduğu üçün istənilən

artmayan və $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ şərtini ödəyən ardıcılıq üçün 3) –cü xassəyə görə

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0 = \lim P(A_n)$$

İsbat edək ki, 4)-dən 1) alınır. Tutaq ki, $A_i, i=1,2,\dots$, kəsişməyən çoxluqlar ardıcılığıdır və $C_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$. Onda $C_{n+1} \subset C_n$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$

Sonlu-additivlik xassəsinə görə

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(C_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(C_n)$$

$$\lim P(C_n) = 0 \text{ olduğuna görə } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim \sum_{i=1}^n P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, 2) və 3) xassələrini aşağıdakı kimi də ifadə etmək olar:

$A_i, i=1,2,\dots$, monoton çoxluqlar ardıcılığı üçün $P(\lim A_n) = \lim P(A_n)$.

Bu xassə hesabi-additiv ehtimal ölçüsünün kəsilməyənlik xassəsi adlanır.

Fərz edək ki, Ω - hər hansı elementar hadisələr fəzası, S isə onun altçoxluqlarından təşkil edilmiş cıxluqlar sistemidir.

Qeyri-hesabi sayda nəticələri olan sınaqların ehtimal modelinin qurulması.

Qeyri hesabi sayda nəticələri olan stoxastik sınaqlara baxaq. Bu cür sınaqların ehtimal modelinin qurulması ilə tanış olaq.

Nöqtənin $[0,1)$ intervalına atılmasından ibarət təsadüf sınağına baxaq. Bütün mümkün nəticələrin “eyniimkanlı” olduğunu qəbul edək. Bu sınağın elementar hadisələr fəzası

$\Omega = [0,1)$ olar. Ancaq bu halda hər bir elementar hadisənin ehtimalını təyin etməklə sınağın ehtimal modelini qurmaq olmaz. Diskret sxemə uyğun olaraq hər ω elementar hadisəsinə onun $P(\omega)$ ehtimalını qarşı qoysaq bütün nəticələr eyniimkanlı” olduğu üçün hər ω elementar hadisəsi üçün $P(\omega) = 0$ olar. Bu halda çıxış yolu bütün elementar hadisələrin deyil, onların müəyyən çoxluğunun ehtimalını təyin etməkdən ibarətdir. Eyni zamanda ehtimallar təyin edilərkən müəyyən prinsiplər gözlənilməlidir: $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ intervallarına düşmə ehtimallarının eyni olduğunu qəbul etmək lazımdır. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ intervalına düşmə ehtimalı $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ intervalına düşmə ehtimalından böyük olmalıdır. Bundan başqa ehtimalları təyin edilən çoxluqlar sinfinin birləşmə, kəsişmə və tamamlama əməllərinə görə qapalı olmaları arzu ediləndir. $A, B, A \cup B, A \cap B, \bar{A}, \bar{B}$ çoxluqlarının da ehtimalları təyin edilməlidir. Nöqtənin $[a, b] \subset [0,1)$ intervalına düşmə ehtimalını $b - a$ fərqi kimi təyin edək. Sonlu sayda kəsişməyən intervalların cəminin $\bigcup_{i=1}^m [a_i, b_i] \subset [0,1)$ ehtimalını isə $\sum_{i=1}^m (b_i - a_i)$ kimi təyin edək. K ilə $[a, b)$ şəklində bütün intervalları və onların kəsişməyən sonlu sayda cəmini işarə edək. S ilə K -nı öz daxilində saxlayan minimal σ -cəbri işarə edək. Ehtimalın davamı haqqında teoremə görə yeganə $P(\cdot)$ ehtimal ölçüsü vardır ki, $P([a, b)) = b - a$ şərti ödənilir. Təsadüfi hadisə olaraq $[0,1)$ çoxluğunun borel çoxluqlarını götürək, $A \subset F$ hadisəsinin ehtimalını isə $P(A)$ qəbul edək.

Beləliklə, biz sınağın ehtimal modelini qurduq.

Görüş haqqında məsələ.

Tutaq ki, iki nəfər $[0, T]$ zaman kəsiyində görüşməyi qərqrq alıblar. Görüş yerinə birinci gələn digərini τ müddəti ərzində gözləyir, sonra isə gedir. x, y ilə müvafiq olaraq birinci və ikinci şəxsin görüş yerinə gəlmə müddətini işarə edək. Onda sınağın elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}$ olar. İntuitiv olaraq sınağın bütün nəticələrinin eynimkanlı olduğunu qəbul edək və görüşün baş tutması ehtimalını hesablayaq.

Bu məsələdə hər bir elementar hadisənin ehtimalını təyin etməklə ehtimal modelini qurmaq olmaz. Əvvəlcə $\Omega = [0, T] \times [0, T]$ düzbucaqlısına daxil olan çoxbucaqlıları təsadüfi hadisə olaraq qəbul edək. Hər bir çoxbucaqlıya isə $P(K) = \frac{\text{mes}(K)}{T^2}$ ehtimalını qarşı qoyaq. F ilə K çoxbucaqlılar sinfini öz daxilində saxlayan ən kiçik σ -cəbri işarə edək. σ -cəbrindən olan hər bir C çoxluğuna isə $P(C) = \frac{\text{mes}(C)}{T^2}$ ehtimalını qarşı qoyaq. Beləliklə, biz sınağın $\{\Omega, F, P\}$ ehtimal modelini qurduq. Bizi maraqlandıran $A = \{(x, y) : |x - y| \leq \tau\}$

hadisəsinin ehtimalı

$$P(A) = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2$$

olar. Xüsusi halda $T = 1 \text{ saat}, \tau = \frac{1}{3} \text{ saat}$ olduqda axtarılan ehtimal

$$P(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

olar.

Həndəsi ehtimal.

Nəzəriyyə və təcrübədə nəticələri sonlu sayda və ya eyniehtimallı olmayan sınaqların öyrənilməsi ehtiyacları klassik ehtimalın məhdudluğunu göstərdi. Klassik ehtimalın tətbiq edilə bilmədiyi bir sinif ehtimal məsələləri üçün həndəsi ehtimal anlayışı verilmişdir.

Kəsilməz elementar hadisələr fəzasında ehtimalın təyininə həndəsi ehtimalın misalında baxaq. Tutaq ki, elementar hadisələr fəzası müstəvidə sahəsi olan hər hansı G oblastıdır. Bu oblastın sahəsi olan altçoxluqlarını hadisə olaraq götürək. Göstərmək ilər ki, belə altçoxluqlar sinfi cəbrdir. Bu halda hər bir A hadisəsinin ehtimalını $P(A) = \frac{mes(A)}{mes(G)}$ kimi təyin etmək olar.

Beləliklə, biz sınağın (Ω, S, P) ehtimal modelini qurduq. Bu düstur ilə hesablanan ehtimal həndəsi ehtimal adlanır. Bu düsturda A oblastı mümkün olan eyniehtimallı halların, G isə əlverişli halların çoxluğu rolunu oynayır.

Sonlu sxemdə olduğu kimi asanlıqla göstərmək olar ki, təsvir edilən sxem ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarını ödəyir.

Həndəsi ehtimal üçün 1-3 xassələrinin doğruluğu bilavasitə onun tərifindən alınır. Lakin klassik ehtimalı sıfır olan hadisə mümkün olmayan hadisədir təklifi həndəsi ehtimal üçün doğru deyildir. Məsələn, müstəvinin müəyyən oblastından təsadüfi götürülən bir nöqtənin həmin oblastın daxilində yerləşən müəyyən bir parçanın nöqtəsi olması hadisəsinin ehtimalı sıfırdır.

Ehtimalın aksiomatik tərif.

Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarını ifadə edərkən tezliyən və ehtimalın xassələri əsas götürülür.

Tutaq ki, Ω elementar hadisələr fəzasıdır, F isə onun müəyyən alt çoxluqlarının σ -cəbridir. Yəni,

$$1) \Omega \in F;$$

$$2) A \in F \Rightarrow \bar{A} = \Omega - A \in F;$$

$$3) A_i \in F, i = 1, 2, \dots, \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

F σ -cəbrinin hər bir çoxluğuna təsadüfi hadisə deyilir. F σ -cəbrində təyin edilmiş ədədi funksiya aşağıdakı şərtləri ödədikdə ona ehtimal deyilir:

Aksiom 1. hər bir $A \in F$ üçün $P(A) \geq 0$.

Aksiom 2. Yəqin hadisənin ehtimalı vahidə bərabərdir

$$P(\Omega)=1$$

Aksiom 3. Cüt-cüt uyuşmayan $A_i, i=1,2,...$, hadisələrin cəminin ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Bu aksiomlar ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları adlanır. Onları ilk dəfə görkəmli rus riyaziyyatçısı **A.N. Kolmoqorov** vermişdir. Bu aksiomlar ehtimal nəzəriyyəsinin və onun bir sıra sahələrinin sürətli inkişafında müstəsna əhəmiyyətə malik olmuşdur.

Aksiom 1 və Aksiom 3-ə görə F σ -cəbrində təyin edilmiş $P(A)$ funksiyası $P(\Omega)=1$ şərtini ödəyən ölçüdür. Bu ölçüyə ehtimal ölçüsü deyilir. (Ω, F, P) üçlüyünə isə ehtimal fəzası deyilir. Ω elementar hadisələr fəzası, təsadüfi hadisələrin F σ -cəbri və F -də təyin edilmiş $P(\cdot)$ ehtimal ölçüsü verildikdə, yəni (Ω, F, P) ehtimal fəzası qurulduqda deyirlər ki, sınağın ehtimal modeli qurulmuşdur.

Göstərək ki, sonlu sxem ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarını ödəyir. Qeyd edək ki, sonlu sxem elementar hadisələrin sonlu $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ çoxluğunda verilir və onların hər birinin ehtimalı $0 \leq p_i \leq 1$ və $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ şərtlərini ödəyir. Ω -nın altçoxluğu olan istənilən $A = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_m}\}$ hadisəsinin ehtimalı isə

$$P(A) = \sum_{l=1}^m p_{i_l} \text{ kimi təyin edilir.}$$

Ω -nın bütün altçoxluqlar sinfi cəbrdir. Doğrudan da, $\emptyset$ və Ω , Ω -nın altçoxluğu olduqları üçün S -ə daxildirlər. Aydındır ki, $A \in S, B \in S$ olduqda onların birləşməsi və kəsişməsi də Ω -ya daxildir.

Sonlu sxemin birinci aksiomu ödədiyini yoxlayaq. Bu məqsədlə Ω -nın altçoxluğu olan istənilən $A = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_m}\}$ hadisəsinə götürək. Sonlu sxemə görə $P(A) = \sum_{l=1}^m p_{i_l}$. Deməli, $P(A) \geq 0$

$P(\Omega) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$ olduğu üçün ikinci aksiom da ödənilir. Ehtimalların toplanması teoreminə görə isə üçüncü aksiom ödənilir.

EHTİMALIN XASSƏLƏRİ.

Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarından istifadə etməklə ehtimalın bir sıra mühüm xassələrini isbat etmək olar.

Teorem 1. İstənilən A hadisəsi üçün $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Doğrudan da, $A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \emptyset$ olduğu üçün 3-cü aksioma görə

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega)$$

Buradan isə, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ olar.

Nəticə 1. Mümkün olmayan hadisənin ehtimalı sıfıra bərabərdir, yəni

$$P(\emptyset) = 0.$$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ bərabərliyində $A = \Omega$ götürsək, $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0$

Buradan isə

$$P(\emptyset) = 0$$

Teorem 2. $B \subset A$ olduqda $P(A - B) = P(A) - P(B)$

İsbatı. A hadisəsini uyuşmayan iki $A - B, B$ hadisələrinin cəmi şəklində göstərək:

$$A = (A - B) \cup B.$$

Onda

$$P(A) = P(A - B) + P(B)$$

Buradan isə $P(A - B) = P(A) - P(B)$ olduğunu alırıq.

Nəticə 1. $A \subset B$ olduqda $P(A) \leq P(B)$

$A \subset B$ olduqda B hadisəsini iki uyuşmayan hadisənin cəmi şəklində göstərmək olar:

$$B = A \cup (B - A)$$

Onda

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

Ehtimal mənfi olmayan ədəd olduğu üçün $P(A) \leq P(B)$ olar.

Nəticə 2. İstənilən A hadisəsi üçün $0 \leq P(A) \leq 1$

Doğrudan da, İstənilən A hadisəsi üçün $A \in \Omega$. Ona görə də

$$P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

Nəticə 3. $P(AB) \leq \min(P(A), P(B))$

$AB \subset A, AB \subset B$ olduğuna görə $P(AB) \leq P(A)$ və $P(AB) \leq P(B)$ olar. Buradan isə

$$P(AB) \leq \min(P(A), P(B))$$

olar.

Eyni qayda ilə $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$ münasibətlərindən aşağıdakı nəticəyə gəlirik.

Nəticə 4. $P(A \cup B) \geq \max(P(A), P(B))$

Teorem 3. İstənilən A və B hadisələri üçün

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

İsbatı. $A \cup B$ hadisəsini uyuşmayan üç hadisənin cəmi şəklində göstərmək olar.

$$A \cup B = (A - AB) \cup (B - AB) \cup (AB)$$

olar. Onda aksiom 3-ə və teorem 2-yə görə görə

$$P(A \cup B) = P(A - AB) + P(B - AB) + P(AB) =$$

$$= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

olar.

Bu münasibətə ehtimalların toplama qanunu deyilir.

Bu düsturu üç hadisə üçün yazmaq:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - \\ - P((A_1 \cup A_2)A_3) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) + P(A_3) - \\ - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

Beləliklə,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - \\ - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

Nəticə 1. A və B üyüşməyən hadisələr olduqda

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

A və B hadisələri üyüşməyən olduğu üçün $n \quad P(AB) = P(\emptyset) = 0$ və

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Nəticə 2. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Bu xassə əvvəlki teoremdə ehtimalın mənfi olmamasını nəzərə almaqla alınır.

Altıncı xassə istənilən $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri üçün də ümumiləşdirilir.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Teorem 4. $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrindən heç olmasa birinin baş verməsi ehtimalı

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1}A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n)$$

Bu düstur riyazi induksiya üsulunun köməyi ilə asanlıqla isbat olunur. Doğrudan da, $n=2$ olduqda bu düstur

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

düsturuna çevrilir. Onun $n-1$ üçün doğru olduqda n üçün də doğru olduğunu göstərək.

Tutaq ki, bu düstur istənilən $n-1$ sayda hadisə üçün doğrudur:

$$P\left(\bigcup_{i=2}^n A_i\right) = \sum_{i=2}^n P(A_i) + \sum_{2 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1}A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-2} P(A_2 \dots A_n);$$

$$P\left(\bigcup_{i=2}^n (A_1A_i)\right) = \sum_{i=2}^n P(A_1A_i) - \sum_{2 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_1A_{i_1}A_{i_2}) + \sum_{2 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_1A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-2} P(A_1A_2 \dots A_n)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

düsturuna görə

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) + P\left(\bigcup_{i=2}^n A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=2}^n (A_1A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1}A_{i_2}) + \\ + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \dots A_n)$$

olduğunu yaza bilərik.

Nəticə 1. Fərz edək ki, $A_1, \dots, A_m$ hadisələrinin ixtiyari r dənəsinin birlikdə baş vermə ehtimalı yalnız bu hadisələrin sayından asılıdır və a_r ədədinə bərabərdir. Onda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = C_m^1 a_1 - C_m^2 a_2 + \dots + (-1)^{m-1} a_m$$

Teorem 5. A_n monoton artan hadisələr ardıcılığı, yəni

$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ olduqda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

A_n monoton azalan hadisələr ardıcılığı, yəni

$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$ olduqda

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Monoton hadisələr ardıcılığının limiti anlayışından istifadə edərək

$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ olduğunu yaza bilərik. Ona görə də bu teoremi ehtimalın

kəsilməyənlik xassəsi adlandırırlar.

Teorem 6. İstənilən sonlu və ya hesabi sayda A_n hadisələri üçün

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n)$$

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) \geq 1 - \sum_n P(\bar{A}_n)$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

İsbatı. $B_1 = A_1, B_2 = \bar{A}_1 A_2, \dots, B_n = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-1} A_n, \dots$

işarə edək. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$$

B_n hadisələri cüt-cüt uyuşmayan hadisələr və $B_n \subset A_n$ olduğu üçün

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = P\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n P(B_n) \leq \sum_n P(A_n)$$

$$P\left(\bigcup_n \bar{A}_n\right) \leq \sum_n P(\bar{A}_n) \text{ olduğunu nəzərə alsaq}$$

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_n \bar{A}_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_n \bar{A}_n\right) \geq 1 - \sum_n P(\bar{A}_n)$$

bərabərsizliyinin doğru olduğunu yaza bilərik.

Teorem 7. Tutaq ki, C A və B hadisələrindən ancaq birinin baş verməsi hadisəsidir. Onda

$$P(C) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$$

İsbatı. C hadisəsini uyuşmayan iki $A\bar{B}$ və $B\bar{A}$ hadisələrinin cəmi şəklində göstərək.

$C = A\bar{B} + B\bar{A}$. Digər tərəfdən $A\bar{B} = A - B = A - AB$ və $B\bar{A} = B - A = B - BA$

olduğu üçün $C = A\bar{B} + B\bar{A} = (A - AB) + (B - AB)$.

$A\bar{B}$, $B\bar{A}$ hadisələrinin uyuşmayan və $AB \subset A$ olduğunu nəzərə alsaq

$$P(A\bar{B} + B\bar{A}) = P(A\bar{B}) + P(B\bar{A}) = P(A - AB) + P(B - AB) =$$

$$= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$$

olduğunu yaza bilərik.

Beləliklə, $P(C) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$

Kəsilməməyənlik teoremi 8. İstənilən $A_n, n \geq 1$ hadisələr ardıcılığı üçün

$$\lim P(A_n) = P(\lim A_n)$$

bərabərliyi doğrudur.

Kəsilməməyənlik aksiomu. Əgər $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ hadisələr ardıcılığında hər bir hadisə özündən əvvəlki hadisəni doğursa və bu hadisələrin hasilı mümkün olmayan hadisədirsə, onda

$$P(A_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \text{ olduqda}$$

Yuxarıda deyilənlərdən aydın olur ki, nəzəri-ehtimal sxemlər konkret elementar hadisələr fəzası, onun cəbr təşkil edən konkret altçoxluqları sinfi və bu cəbrin çoxluqlarının ehtimalı, yəni $\{\Omega, S, P\}$ üçlüyü ilə verilir. $\{\Omega, S, P\}$ üçlüyünə ehtimal fəzası, $\{\Omega, S\}$ -də təyin edilmiş P ehtimalına isə Ω elementar hadisələr fəzasında ehtimalların paylanması deyilir.

ŞƏRTİ EHTİMAL

ŞƏRTİ EHTİMAL ANLAYIŞI.

Aydındır ki, A hadisəsinin $P(A)$ ehtimalı haqqında ancaq müəyyən şərtlər kompleksi yerinə yetirildikdə, yəni sınaq aparıldıqdan sonra danışmaq olar. Sınağın aparılma şərtləri dəyişdikdə həmin sınaq dəyişir, başqa sınaq alınır və nəticədə hadisənin ehtimalı da dəyişir. Məsələn, A hadisəsinin ehtimalının hesablanmasında aparılan sınağın şərtlərinə yeni bir şərti - B hadisəsinin baş verməsi şərtində əlavə etsək, onda başqa bir ehtimal - B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin şərti ehtimalını alırıq. Beləliklə, təcrübədə bir çox hallarda A hadisəsinin ehtimalını başqa bir B hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində hesablamaq lazım gəlir. Bu cür ehtimala şərti ehtimal deyilir. B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin şərti ehtimalı $P(A/B)$ kimi işarə edilir.

Tutaq ki, n elementar hadisədən m -i A hadisəsi, k saydası isə B hadisəsi üçün əlverişlidir. Onda

$$P(A) = \frac{m}{n}, P(B) = \frac{k}{n}$$

Fərz edək ki, B hadisəsi baş verdikdə A hadisəsi üçün əlverişli halların sayı l – dir. Onda klassik ehtimalın tərifinə A hadisəsinin şərti ehtimalı

$$P(A/B) = \frac{l}{k}$$

olar. Axırkı bərabərlikdə kəsrin surət və məxrəcini n -ə bölsək, şərti ehtimal üçün

$$P(A/B) = \frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

düsturunu alırıq.

AB hadisəsi üçün əlverişli halların sayı l – olduğu üçün $\frac{l}{n}$ mütləq ehtimaldır.

Beləliklə, B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin şərti ehtimalı

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

kimi hesablanır.

Şərti ehtimalın xassələri.

Şərti ehtimalın aşağıdakı xassələri vardır:

1. $P(A/B) \geq 0$
2. $P(A/\Omega) = 1$
3. $P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$
4. $P(\emptyset/B) = 0$
5. $A_1 \subset A_2$ olduqda $P(A_1/B) \leq P(A_2/B)$
6. $0 \leq P(A/B) \leq 1$
7. $P(A_1 \cup A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B) - P(A_1 A_2/B)$

Bu xassələr mütləq ehtimalın uyğun xassələrindən alınır

Şərti ehtimalın düsturuna əsasən

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{10}; P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3}{10}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$$

$$AB \subset A \quad AC = A(A+B) = A + AB = A$$

$$P(AC = P(A)) = \frac{3}{10}$$

$$P(A/C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = 1$$

EHİTİMALIN VURMA DÜSTURU. TAM EHİTİMAL DÜSTURU. BEYES DÜSTURU

EHİTİMALIN VURMA DÜSTURU.

B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin $P(A/B)$ şərti ehtimalı

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

düsturu ilə hesablanır. Buradan, B hadisəsinin $P(B) > 0$ şərtsiz ehtimalı məlum olduqda, A və B hadisələrinin eyni zamanda baş verməsinin ehtimalını təyin etmək olar:

Fərz edək ki, $A_1, \dots, A_n$ hadisələri

$$P(A_1) > 0, P(A_1 A_2) > 0, \dots, P[A_1 \dots A_n] > 0$$

şərtlərini ödəyir. Onda aşağıdakı düstur doğrudur:

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1})$$

Doğrudanda

$$p(A_1)P(A_2 / A_1) \dots P(A_n / A_1 \dots A_{n-1}) = P(A_1) \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \dots \frac{P(A_1 A_2 \dots A_n)}{P(A_1 A_2 \dots A_{n-1})} = P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

olar.

TAM EHTİMAL DÜSTURU

Fərz edək ki, $A_1, \dots, A_n$ hadisələri tam sistem təşkil edir. Onda ixtiyari A hadisəsi üçün

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A / B_i) P(B_i)$$

İsbatı. Doğrudanda ehtimalın toplama və vurma düsturlarına əsasən yazıla bilər:

$$P(A) = P(A\Omega) = P\left(\sum_{i=1}^n AB_i\right) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(A / B_i) P(B_i)$$

BEYES DÜSTURU.

B hadisəsi A_k ($k=1,2,\dots,n$) hadisələrindən biri başverdikdə başverir və sınaq nəticəsində B hadisəsi başvermişdir. Sınaqdan əvvəl A_k ($k=1,2,\dots,n$) hadisələrinin $P(A_k)$ ehtimalları və B hadisəsinin A_k ($k=1,2,\dots,n$) hadisələrinin hər birinə görə $P(B / A_k)$ şərti ehtimalları məlumdur. B hadisəsinin baş verməsi A_k hadisəsinin ehtimalına necə təsir edir?

Bu məsələni həll etmək üçün

$$P(BA_k) = P(B)P(A_k / B) = P(A_k)P(B / A_k)$$

bərabərliklərindən istifadə edək.

Buradan

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{P(B)}$$

bərabərliyi və tam ehtimal düsturuna əsasən

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B / A_k)}, k=1,2,\dots,n$$

münasibəti alınır.

Axırkı bərabərliyə Bayes düsturu deyilir. Sınaqdan əvvəl hesablanan $P(A_k)$ ehtimalları apriori (mənası "əvvəlki", burada sınaqdan əvvəlki) olan apriori latın sözündən götürülmüşdür) ehtimallar, sınaqdan sonra hesablanan $P(A_k / B, k=1,2,\dots,n)$ ehtimalları isə aposteriori (mənası sonrakı) olan aposteriori latın sözündən götürülmüşdür.) ehtimallar adlanır.

Burada baxılan $A_k, k=1,2,\dots,n$ hadisələrinə bəzən fərziyyələr, Bayes düsturuna isə fərziyyələr teoremi deyilir.

Bayes düsturu B hadisəsi başverdikdən sonra $A_k, k=1,2,\dots,n$ hadisələrinin baş verməsi haqqında fərziyyələrin ehtimallarını yenidən qiymətləndirməyə imkan verir.

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR.

İki hadisənin asılı olmaması

Əgər A hadisəsinin baş verməsi B hadisəsinin baş verməsi ehtimalına təsir etmirsə onda deyirlər ki, B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyildir. Başqa sözlə

$$P(B/A) = P(B)$$

olduqda deyirlər ki, B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyildir.

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

olduğu üçün asılı olmayan hadisələr üçün

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

olar.

Tutaq ki, $P(B) > 0$. Eyni qayda ilə $P(A/B) = P(A)$ olduqda deyirlər ki, A hadisəsi B hadisəsindən asılı deyildir. Buradan yenə də

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

olduğunu alırıq. Bu münasibət A və B -yə görə simmetrikdir və onların ehtimalları sıfır olduqda da mənası vardır.

$P(AB) = P(A)P(B)$ olduqda deyirlər ki, A və B hadisələri asılı və yaxud statistik asılı deyillər.

Hadisələrin asılı olmaması haqqında aşağıdakı təklifləri söyləmək olar:

Teorem 1. A və B asılı olmayan hadisələr olarsa, onda $(\bar{A}, B), (A, \bar{B}), (\bar{A}, \bar{B})$ cütlərindən hər birini təşkil edən hadisələr də asılı olmaz.

İsbatı. $A, \bar{B}$ hadisələrinin asılı olmadıqlarını göstərmək kifayətdir. Qeyd edək ki, $A\bar{B} = A - (AB)$

$$\text{Ona görə də } P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$$

A və B hadisələri asılı olmadıqlarını nəzərə alsaq

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B})$$

olduğunu yazı bilərik. Deməli, A və B hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

Hadisələrin asılı olmaması haqqında aşağıdakı təklifləri söyləmək olar:

a) $P(B) > 0$ olduqda $P(A/B) = P(A)$ bərabərliyi A və B hadisələrinin asılı olmaması üçün zəruri və kafidir.

b) Tutaq ki, A və B asılı olmayan müsbət ehtimallı hadisələrdir. Bu halda A və B uyuşandır.

Doğrudanda, $P(AB) = 0$ olarsa, $P(AB) = P(A)P(B) = 0$ olar. Bu isə şərtə ziddir.

c) A və B hadisələrinin asılı olmaması

$$P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A)$$

bərabərliyi ilə eynigüclüdür. Burada $0 < P(B) < 1$

Qeyd edək ki, A və B uyuşmayan hadisələr və $P(A) > 0, P(B) > 0$ olduqda onların asılı hadisələr olar. A və B hadisələri uyuşmayan olduğu üçün

$$AB = \emptyset \text{ və } P(AB) = P(\emptyset) = 0,$$

$$0 = P(AB) = P(A)P(B) > 0$$

Beləliklə, A və B asılı hadisələrdir.

Teorem 2. $A \vee B_1$; $A \vee B_2$ hadisələri asılı olmayan, $B_1 \vee B_2$ uyuşmayan hadisələr olduqda $A \vee B_1 + B_2$ hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

İsbatı. Doğrudan da,

$$P(A(B_1 + B_2)) = P(AB_1 + AB_2)$$

$A, B_1 \vee AB_2$ hadisələri uyuşmayan olduqları üçün

$$\begin{aligned} P(AB_1 + AB_2) &= P(AB_1) + P(AB_2) = P(A)P(B_1) + P(A)P(B_2) = \\ &= P(A)[P(B_1) + P(B_2)] = P(A)P(B_1 + B_2) \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$P(A(B_1 + B_2)) = P(A)P(B_1 + B_2)$$

Bir neçə hadisənin asılı olmaması

$A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrindən istənilən ikisi asılı olmadıqda onlara cüt-cüt asılı olmayan hadisələr deyilir.

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri üçün $1 \leq i < j < k < \dots \leq n$ indekslərinin bütün mümkün kombinasiyaları üçün $2^n - n - 1$ sayda

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}), 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, k = 2, 3, \dots, n,$$

yəni

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

.....

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

bərabərlikləri ödənildikdə qarşılıqlı (birgə) asılı olmayan hadisələr adlanır.

Qeyd edək ki, cüt-cüt asılı olmayan hadisələr qarşılıqlı asılı ola bilər. Bu mənada hadisələrin qarşılıqlı asılı olmaması anlayışı cüt-cüt asılı olmamaq anlayışından daha güclüdür. Məsələn, $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ eyniehtimallı elementar hadisələr fəzasında

$$A = (\omega_1, \omega_2), B = (\omega_1, \omega_3), C = (\omega_1, \omega_4)$$

hadisələri buna misal ola bilər. Doğrudan da,

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

bərabərlikləri A, B və C hadisələrinin cüt-cüt asılı olmadığını,

$$P(ABC) = P(\omega_1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

bərabərliyi isə onların qarşılıqlı asılı olduğunu göstərir.

Hadisələrin asılı olmaması haqqında aşağıdakı təklifləri söyləmək olar:

- 1) n sayda hadisələrin asılı olmaması, bu hadisələrdən istənilən saydasını onların tamamlayıcı hadisələri ilə əvəz etdikdə dəyişmir.

- 2) $A_1, \dots, A_n$ asılı olmayan hadisələr olarsa, onlardan götürülən ixtiyari r ($r < n$) sayda $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ hadisələri də asılı olmayacaqdır.
- 3) Asılı olmayan $A_1, \dots, A_n$ hadisələrindən heç olmasa birinin baş vermə ehtimalı

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - [1 - P(A_1)] \cdot [1 - P(A_n)]$$

kimi hesablanılır.

Bölmə3 .ARDICIL TƏKRAR SINAQLAR.BERNULLİ SXEMİ

Bernulli düsturu və Bernulli teoremi.

Bernulli sınaqları.

Tutaq ki, müəyyən şərtlər kompleksi daxilində ardıcıl sınaqlar aparılır. Əgər hər bir sınağın nəticəsi digər sınağın nəticəsinə təsir etmirsə, onda belə sınaqlara asılı olmayan sınaqlar deyilir.

Aparılan asılı olmayan hər sınağın nəticəsi “uğurlu” və ya “uğursuz” ola bilər, yəni gözlənilən təsadüfi A hadisəsi baş verə, yaxud baş verməyə bilər. Asılı olmayan sınağın iki nəticəsindən birinin baş verməsi halına Y. Bernulli baxmışdır və onu Bernulli sxemi adlandırırlar.

Tərif. Eyni bir sınağın təkrarından ibarət sınaqlar aşağıdakı iki şərti ödədikdə, Bernulli sınaqları adlanır:

- sınaqlar asılı olmayandirlar;
- hər bir sınağın yalnız iki nəticəsi vardır və bu nəticələrin ehtimalı bütün sınaqlar üçün eynidir;
- Bernulli sınağının nəticələrindən birini şərti olaraq “+”, digərini isə “-” adlandıraraq.

Bernulli düsturu və Bernulli teoremi.

Tutaq ki, n sayda asılı olmayan sınaq aparılır və hər bir sınaqda A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı sabit p ədədinə, baş verməməsi ehtimalı isə $q=1-p$ ədədinə bərabərdir. i -ci sınağın nəticəsinə $B_i, i=1,2,\dots,n$ ilə işarə edək. Bu ardıcılığın m hissəsində A hadisəsi, qalan $n-m$ hissəsində isə $\bar{A}$ olarsa, belə ardıcılıqların sayı C_n^m olar.

Sınaqlar asılı olmadıqlarından onların nəticələri – hadisələr də asılı deyillər və ehtimalların vurulması qaydasına görə belə ardıcılığın ehtimalı $p^m q^{n-m}$ ədədinə bərabər olar. Onda uyuşmayan (birgə olmayan) hadisələrin ehtimalları haqqında qaydaya görə m -qədər A -dan və $n-m$ qədər $\bar{A}$ -dən ibarət ardıcılıqların ehtimalları cəmi

$$p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

olar.

Aparılan n Bernulli sınağında “+” nəticənin baş vermə sayını s_n ilə işarə edək. Beləliklə aşağıdakı nəticəyə gəlirik:

Bernulli düsturu. Tutaq ki, aparılan n Bernulli sınağında müsbət nəticənin baş vermə sayı s_n -dir. Hər sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə p -dir. Bu halda

$$p_n(m) = P(s_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} (q = 1 - p, m = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$p_n(m)$ ehtimallarına binomial paylanma deyilir. Bu paylanma $m=0, 1, \dots, n$ ədədləri ilə $p_n(m)$ -lər arasında uyğunluq şəklində verilir. (1) ehtimalı $(px + q)^n$ binomunun ayrılışında x^k -nin əmsalına bərabər olduğuna görə, ona binomial ehtimal deyilirlər. Binomial ehtimalların çoxluğu binomial paylanma, n və p sabitləri isə onun parametrləri adlanır.

Binomial paylanmanın xassələri:

1) $p_n(m) > 0, \sum_{m=0}^n p_n(m) = 1$

Bu münasibətin doğruluğunu iki mülahizədən almaq olar. Birincisi, n ardıcıl asılı olmayan sınaqlar zamanı hadisələr ardıcılıqları tam sistem təşkil edir və onlardan hər hansının baş verməsi yəqin hadisədir. İkincisi, axırıncı münasibətin doğruluğu

$$1^n = (p + q)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=0}^n p_n(m)$$

binomunun açılışından alınır.

2) $p_n(m)$ ehtimalı m -dən asılı funksiya kimi özünün ən böyük qiymətini $(n+1)p$ ədədi kəsir olduqda $(n+1)p$ ədədinin tam qiymətində, tam ədəd olduqda isə $m=(n+1)p$ və $m=(n+1)p-1$ qiymətlərində alır.

Tərif. $p_n(m)$ ehtimal özünün ən böyük qiymətini $m = m_0$ qiymətində alarsa, onda m_0 ədədi binomial paylanmanın modası, $p_n(m_0)$ isə maksimal ehtimal adlanır.

3) n sayda Bernulli sınaqlarında müsbət nəticənin r -dən az syda baş verməsi ehtimalını

$B_n(r) = \sum_{m=0}^{r-1} p_n(m)$ kimi hesablamaq olar.

BİNOMİAL PAYLANMA ÜÇÜN ASİMPTOTİK DÜSTURLAR.

Ehtimal nəzəriyyəsində $p_n(m)$ ehtimalı üçün müxtəlif asimptotik düsturlar verilmişdir. Burada Puasson və Muavr-Laplas düsturları ilə tanış olacağıq.

Puasson teoremi. $n \rightarrow \infty, np \rightarrow \lambda \Rightarrow C_n^k p^k q^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Bu münasibət hər bir k -ya görə müntəzəm ödənilir.

İsbatı. Bu münasibət aşağıdakı bərabərliklərdən alınır:

$$C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \times \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^{n-k}$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \rightarrow 1$$

$$\lim (1-p)^{n-k} = \lim (1-p)^n = \lim \left[(1-p)^{\frac{1}{p}} \right]^{np} = e^{-\lambda}$$

$$\lim \frac{(np)^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$$

Teoremə əsasən n kifayət qədər böyük, p isə kifayət qədər kiçik olduqda

$$p_n(k) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$$

asimptotik bərabərliyi doğrudur.

Bu düsturdan adətən $p \leq 0.1, npq \leq 9$ olduqda istifadə edilir.

Muavr – Laplasın lokal teoremi

n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində Bernulli düsturundan istifadə texniki cəhətdən çətinlik yaradır. Laplasın lokal teoremi $p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ ehtimalları hesablamaq üçün asimptotik yaxınlaşma düsturudur. ($\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1, x \rightarrow \infty$ olduqda, deyirlər ki, $f(x)$ $\varphi(x)$ -n asimptotik yaxınlaşmasıdır).

Qeyd edək ki, xüsusi halda $p=1/2$ üçün asimptotik düstur 1730-cu ildə Muavr tərəfindən alınmışdır. 1783 cü ildə isə Laplas bu düsturu istənilən $0 < p < 1$ üçün isbat etmişdir.

Teorem. Əgər asılı olmayan sınaqlar zamanı müsbət nəticənin baş verməsi ehtimalı, p sabitdirsə, onda

$$\lim \sqrt{npq} p_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

doğrudur, burada $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ və x müəyyən sonlu parçada dəyişdikdə bütün $k=0,1,\dots,n$ qiymətlərində yığılma müntəzəmdir.

Teoremə əsasən aparılan n sınaqda hadisənin m dəfə baş verməsi ehtimalı təqribən

$$p_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

bərabərliyi ilə təyin edilir.

x-in müsbət qiymətləri üçün $\varphi(x)$ funksiyasının qiymətləri cədvəli işlənib hazırlanmışdır. $\varphi(x)$ tək funksiya olduğu üçün x-in mənfi qiymətləri üçün də həmin cədvəldən istifadə etmək olar.

Muavr – Laplasın integral teoremi.

Aparılan n sayda Bernulli sınağında “ müsbət” nəticənin baş vermə sayının müəyyən parçada yerləşməsi ehtimalını hesablamaq üçün asimptotik düsturu Muavr – Laplasın integral troremindən almaq olar.

Teorem.

$$P\left(a \leq \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}$$

münasibəti müntəzəm ödənilir.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

funksiyasına Laplas funksiyası deyilir.

Laplas funksiyasının müsbət x -lər üçün qiymətləri cədvəli işlənib hazırlanmışdır. Bu funksiya tək funksiya, yəni

$$\Phi(x) = -\Phi(-x)$$

şerti ödənilir. Bu isə o deməkdir ki, $\Phi(x)$ funksiyasının mənfi x -lər üçün qiymətlərini axırıncı düsturun köməyi ilə hesablamaq olar.

Cədvəldə $\Phi(x)$ funksiyasının qiymətləri $x < 5$ üçün verilmişdir. $x > 5$ olduqda $\Phi(x) = 0.5$ qəbul etmək olar.

Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlidən istifadə etmək üçün $P\left(a \leq \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}$ münasibətini aşağıdakı kimi yazaq:

$$P\left(a \leq \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Qeyd edək ki, $\{m_1 \leq m \leq m_2\}$ hadisəsi $\left\{ \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} \right\}$ hadisəsi ilə eynigüclü hadisədir. Ona görə də asılı olmayan n sınaqda hadisənin ən azı m_1 , ən çoxu isə m_2 dəfə başverməsi ehtimalını təqribən $p_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ bərabərliyi ilə hesablamaq olar.

$$\text{Burada } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Muavr – Laplasın integral teoreminin tətbiqləri.

Asılı olmayan n sayda sınaqların hər birində A hadisəsinin baş vermə ehtimalı p ədədinə bərabərdir.

Muavr – Laplasın integral teoremini $\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon$ bərabərsizliyinin ehtimalının qiymətləndirməsinə tətbiq edək.

Bu məqsədlə $P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \alpha\right) = \beta$ işarə edək. n in böyük qiymətlərində β ehtimalını tapmaq olar:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < m < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

Deməli, Muavr – Laplasın integral teoreminə görə

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

Beləliklə aşağıdakı teoremin doğruluğunu alırıq.

Bernulli teoremi. Tutaq ki, aparılan n Bernulli sınaqlarında müsbət nəticənin baş vermə sayı s_n , hər bir sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə p -dir. Bu halda

$$\lim P\left\{\left|\frac{s_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

bərabərliyi doğrudur.

A hadisəsinin p baş vermə ehtimalına əsasən əvvəcdən onun həqiqətən baş verməsi və ya baş verməməsi haqqında qəti fikir söyləyə bilmərik. Lakin külli miqdarda təcrübələrdə aşağıdakı faktın doğruluğu aşkar edilmişdir: ehtimalı vahidə yaxın hadisələr sanki hökmən baş verir, ehtimalı sıfıra yaxın olan hadisələr isə çox nadir hallarda baş verir. Birinci növ hadisələri praktiki yəqin, ikinciləri isə praktiki mümkün olmayan hesab edirlər. Hadisənin praktiki mümkün olmaması üçün onun ehtimalı nə dərəcədə kiçik olmalıdır? Bu suala birqiymətli cavab vermək olmaz, çünki burada baxılan hadisənin nə dərəcədə əhəmiyyətli olması nəzərə alınmalıdır. Məsələn, riyazi statistikada ehtimalı 0.001 və 0.005 sərhədləri arasında yerləşən hadisələr praktiki mümkün olmayan hesab edilir.

Bernulli teoremi təsdiq edir ki, külli miqdarda sınaqların seriyasında hadisələrin tezliyi ilə onun ehtimalı arasında fərqi istənilən qədər kiçik olması praktiki yəqin hadisədir. Beləliklə, bu teorem ehtimalın statistik tərifini əsaslandırır.

Bernulli teoremi 1713-cü ildə müəllifin ölümündən 8 il sonra latın dilində nəşr edilmişdir. Mütəxəssislər bu teoremi ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafında mühüm kəşf kimi qiymətləndirmişlər.

Akademik B.V. Qnedenko: “Bernulli teoremini mübaligəsiz ehtimal nəzəriyyəsinin bir elm kimi varlığının başlanğıcı hesab etmək olar”.

Akademik A.A. Markov: Böyük ədədlər qanununun başlanğıcını qoyan teorem, birinci dəfə Bernullinin işində çap və isbat edilmişdir. Y. Bernulli özünün teoremini dəqiq söyləmiş və tam ciddiliklə isbat etmişdir

1. A hadisəsinin baş vermə tezliyinin p ehtimalından kənarlaşmasının α ədədini aşmaması hadisəsinin ehtimalını tapın. Bu ehtimal aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \alpha\right\} &= P\left\{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq \alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

$$\text{Beləliklə, } P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \alpha\right\} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Axırıncı bərabərlikdə dörd n, α, p, β parametrlər var. Onlardan üçü məlum olduqda dördüncüsünü tapmaq olar.

2. Tezliyin ehtimaldan kənarlaşmasının α ədədini aşmaması hadisəsinin verilmiş β ədədinədən kiçik olmaması üçün neçə sınaq aparılmalıdır?

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \alpha\right\} \geq \beta$$

İntegral teoremə əsasən

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq \beta$$

olduğunu yazmaqla bilərik. Deməli, $2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geq \beta$. Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən verilmiş α və β -yə görə n -i tapırıq. Bunun üçün Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən $\Phi(x_\beta) = \frac{\beta}{2}$ şərtini ödəyən x_β ədədini tapırıq. Bu funksiya monoton artan olduğu üçün $\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} \geq x_\beta$ olduğunu yazmaqla bilərik. Buradan isə $n \geq pq \frac{x_\beta^2}{\alpha^2}$ olduğunu alırıq.

3. Sınaqların sayı və β ehtimalı verildikdə $\left|\frac{\mu}{n} - p\right|$ mütləq qiymətinin mümkün sərhədlərini tapın. Başqa sözlə, β və n verildikdə α -nı tapmaq lazımdır.

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \alpha\right\} = \beta \text{ bərabərliyini ödəyən } \alpha\text{-nı}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \beta$$

münasibətindən tapırıq.

Bölmə 4. TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTLƏR.

TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏT ANLAYIŞI.

Hadisə və onun ehtimalı kimi təsadüfə kəmiyyət anlayışı da ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir. Hər bir sınağın nəticəsinə təsadüfə kəmiyyət kimi baxa bilərik. Təsadüfə kəmiyyət, baxılan hadisəni keyfiyyət və kəmiyyətə xarakterizə edən və

təsadüfə amillərin təsiri ilə bu və ya digər şəkildə müxtəlif qiymətlər ala bilən kəmiyyətlərdir. Təsadüfə kəmiyyətin hansı qiymət alacağını qabaqcadan qəti demək mümkün deyildir. Onun hər bir sınaqda aldığı qiymətlər müxtəlif səbəb və təsadüflərdən asılı olaraq dəyişir.

Sınağın nəticəsini keyfiyyətə xarakterizə etmək o deməkdir ki, sınaq zamanı konkret əlamət

fakt qeyd olunur və onun nəticəsinin əlamətə malik olub- olmadığı müəyyənləşdirilir. Qeydə alınan bu əlamət hadisə adlanır və deyirlər: “hadisə baş verdi”, ya da “hadisə baş vermədi”.

Sınağın nəticəsini kəmiyyətə xarakterizə etmək o deməkdir ki, sınaq zamanı hər hansı kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər müəyyən olunur, belə ki, həmin qiymətləri sınağa qədər təyin etmək mümkün deyildir. Belə kəmiyyətlər təsadüfi adlanır.

Deməli, təsadüfə kəmiyyət sınaq nəticəsində bu və ya digər qiymət ala biləcək dəyişən kəmiyyətdir.

Elementar hadisələr fəzası sonlu və ya hesabi çoxluq olduqda burada təyin edilmiş istənilən funksiya təsadüfə kəmiyyətdir. Ancaq elementar hadisələr fəzası qeyri hesabi çoxluq olduqda Ω -da təyin edilmiş istənilən funksiya təsadüfə kəmiyyət kimi baxmaq olmaz.

Bir çox məsələlərin həllində təsadüfə kəmiyyətə elementar hadisələrin funksiyası kimi baxmağa ehtiyac yoxdur. Bu halda təsadüfə kəmiyyətlə bağlı hadisələrin ehtimalını bilmək kifayətdir. Beləliklə, ədəd oxunun kifayət qədər geniş $\{B\}$ çoxluqlar sinfi üçün $\{\omega: X(\omega) \in B\}$ təsadüfə hadisələri F σ -cəbrinə daxil olmalıdır. Bu halda $P(\omega: X(\omega) \in B)$ ehtimalına baxmaq olar. $\{\omega: X(\omega) \in B\}$ şərtinin ödənilməsi üçün isə $\{\omega: X(\omega) \in (-\infty, x)\} = \{\omega: X(\omega) < x\}$ çoxluğunun F σ -cəbrinə daxil olması kifayətdir.

Tutaq ki, hər hansı (Ω, F, P) ehtimal fəzası verilmişdir. Bu o deməkdir ki, Ω elementar hadisələr fəzası, onun σ -cəbr olan F hadisələr sistemi və bu sistem üzərində təyin edilmiş $P(A)$ ehtimalı göstərilmişdir. Tutaq ki, $X = X(\omega)$ elementar hadisələr fəzasında təyin edilmiş funksiya, x isə istənilən həqiqi ədəddir. Ω çoxluğunun $X(\omega) < x$ şərtini ödəyən bütün ω elementləri çoxluğunu $\{\omega: X(\omega) < x\}$ və ya qısaca olaraq $\{X < x\}$ ilə işarə edək.

Tərif 1. Ω elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş və istənilən həqiqi x ədədi üçün

$$\Omega_x = \{\omega: X(\omega) < x\} \subset F$$

şərtini ödəyən $X = X(\omega)$ funksiyasına təsadüfə kəmiyyət deyilir.

Təsadüfə kəmiyyətləri latın əlifbasının böyük hərfləri, $X, Y, Z, \dots$ onların ala biləcəyi qiymətləri isə kiçik $x, y, z, \dots$ ilə işarə edəcəyik.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, bir çox hallarda təsadüfə kəmiyyətə elementar hadisələrin funksiyası kimi baxmaq əvəzinə bu təsadüfə kəmiyyətlə bağlı hadisələrin ehtimalını bilmək, yəni onun paylanma qanununu bilmək kifayətdir. Sonlu və ya hesabi sayda intervalların birləşməsi və yaxud kəsişməsindən ibarət olan həqiqi ədədlər çoxluğunun istənilən B çoxluğu üçün $P\{\omega: X(\omega) \in B\}$ ehtimalı verildikdə deyirlər ki, X təsadüfə kəmiyyətinin paylanma qanunu verilmişdir

TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTİN PAYLANMA FUNKSIYASI

Təsadüfə kəmiyyətləri ancaq onların ala bildiyi qiymətlər çoxluğunu göstərməklə təyin etmək mümkün deyildir. Belə ki, qiymətlər çoxluğu eyni olan, lakin bu qiymətləri müxtəlif ehtimallarla alan müxtəlif təsadüfə kəmiyyətlər vardır. Buna görə də, təsadüfə kəmiyyətin verilməsi üçün onun ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu və həm də bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığı göstərilməlidir.

Bu məqsədlə təsadüfə kəmiyyətin paylanma funksiyasına baxılır.

İstənilən həqiqi x üçün Ω_x çoxluğu σ -cəbr olan F sisteminə daxil olduğundan, onun ehtimalı təyin olunmuşdur. Bu ehtimalla X təsadüfə kəmiyyətinin x -dən kiçik qiymət alması hadisəsinin ehtimalına həmin kəmiyyətin paylanma funksiyası deyilir və

$$F(x) = P(X < x)$$

kimi işarə edilir.

PAYLANMA FUNKSIYASININ XASSƏLƏRİ.

1. Paylanma funksiyasının qiymətlər oblastı $[0,1]$ parçasıdır:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

Bu xassə paylanma funksiyasının $\{X < x\}$ hadisəsinin ehtimalı, hadisənin ehtimalının isə mənfi olmayan və vahidi aşmayan ədəd olmasından alınır.

Verilmiş təsadüfə kəmiyyətlə bağlı olan bir çox hadisələrin ehtimalını həmin təsadüfə kəmiyyətin paylanma funksiyası vasitəsilə hesablamaq olar.

2. $X = X(\omega)$ təsadüfə kəmiyyətinin $[x_1, x_2)$ yarımintervalında qiymət alması hadisəsinin ehtimalı paylanma funksiyasının x_2 və x_1 nöqtələrindəki qiymətləri fərqinə bərabərdir:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$X = X(\omega)$ təsadüfə kəmiyyətinin x_2 -dən kiçik qiymət alması hadisəsinə iki uyuşmayan hadisənin cəmi şəklində göstərək:

$$(X < x_2) = \{X < x_1\} + \{x_1 \leq X < x_2\}$$

Onda ehtimalların toplanma qanununa görə

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2),$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

olar. Buradan isə 2-ci xassə alınır.

3. Paylanma funksiyası azalmayıdır.

Doğrudan da, hadisənin ehtimalı mənfi ədəd olmadığından, istənilən $x_1 < x_2$ üçün $F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq x < x_2) \geq F(x_1)$.

Beliliklə,

$$F(x_2) - F(x_1) \geq 0, F(x_2) \geq F(x_1)$$

4. $P(X \geq x) = 1 - F(x)$

$\{X \geq x\}$ hadisəsi $\{X < x\}$ hadisəsinin tamamlayanı olduğu üçün

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x)$$

5. $x \rightarrow \infty$ olduqda $F(x) \rightarrow 1$

Tutaq ki, $x_n, n \geq 1$ artan ardıcılıqdır və $x_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ olduqda. $A_n, n \geq 1$ uyuşmayan hadisələr ardıcılığına baxaq:

$$A_1 = \{X < x_1\}, A_n = \{x_{n-1} \leq X < x_n\}, n = 2, 3, \dots$$

Aydındır ki, $(X < x_n)$ hadisəsini $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cəmi şəklində göstərmək olar:

$$\{X < x\} = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Onda ehtimalların toplanma qanununa görə

$$F(x_n) = P(X < x_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Aydındır ki, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Ehtimalın Kolmoqorov aksiymlarına görə

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$$

olduğunu alırıq.

$$6. x \rightarrow -\infty \text{ olduqda, } F(x) \rightarrow 0$$

Tutaq ki, $x_n, n \geq 1$ monoton azalan ardıcılıqdır və $x_n \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty$ olduqda. $A_n = (X < x_n), n \geq 1$ hadisələr ardıcılığı kəsilməyənlik aksiomunun şərtlərini ödəyir:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots \text{ və } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$$

$$\text{Onda } F(x_n) = P(A_n) \rightarrow P(\emptyset) = 0$$

7. Paylanma funksiyayı istənilən nöqtədə soldan kəsilməyəndir, yəni istənilən x nöqtəsində

$$F(x - \Delta) \rightarrow F(x - 0) = F(x), x \rightarrow +\Delta$$

bərabərliyi ödənilir.

Monoton azalan $0 \leq \Delta_n, n \geq 1$ ardıcılığına baxaq və $A_n = \{x - \Delta_n \leq X < x\}, n \geq 1$ işarə edək. Aydındır ki, $A_{n+1} \subset A_n$ və istənilən n üçün $x - \Delta_n \leq X < x$ şərtini ödəyən $\omega \in \Omega$ olmadığı üçün $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$. Kəsilməyənlik aksiomuna görə $P(A_n) \rightarrow P(\emptyset) = 0$.

2-ci xassəyə əsasən $P(A_n) = F(x) - F(x - \Delta_n)$. Beləliklə, axırıncı bərabərliyin hər iki tərəfində $n \rightarrow \infty$ olmaqla limitə keçsək

$$F(x - \Delta_n) \rightarrow F(x), \Delta_n \rightarrow +0$$

olduğunu alırıq.

Bu xassələr paylanma funksiyasını tamamilə təyin edir. İsbat etmək olar ki, verilmiş $F(x)$ funksiyasının müəyyən X təsadüfə kəmiyyətinin paylanma funksiyası olması üçün onun 1, 3, 5, 6, 7 xassələrini ödəməsi zəruri və kafidir. Bu təklifdən aşağıdakı nəticə alınır:

Nəticə. Həqiqi dəyişənli $f(x)$ funksiyası

$$f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\text{şərtlərini ödədikdə } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

funksiyası paylanma funksiyasıdır.

Hər bir təsadüfə kəmiyyət öz paylanma funksiyasını birqiymətli təyin edir. Lakin paylanma funksiyasının verilməsilə təsadüfə kəmiyyət birqiymətli təyin edilmir. Hər

təsadüfə kəmiyyətin ancaq bir paylanma funksiyası olduğu halda , bir funsiya müxtəlif təsadüfə kəmiyyətlərin paylanma funksiyası ola bilər.

DISKRET VƏ KƏSİLMƏZ PAYLANMALAR.

Təsadüfə kəmiyyətin tamamilə təyin olunması üçün onun aldığı qiymətlər çoxluğu və bu qiymətləri hansı ehtimalla alması göstərilməlidir. Təsadüfə kəmiyyətin paylanma funksiyası bu mənada onu tamamilə xarakterizə edən ən universal vasitələrdən biridir. Təsadüfə kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərlə , bu qiymətlərə uyğun ehtimallar arasında əlaqə başqa üsullarla da verilə bilər.

Təsadüfə kəmiyyətin mümkün qiymətləri ilə onlara uyğun ehtimallar arasında əlaqə yaradan hər bir münasibətə təsadüfə kəmiyyətin paylanma qanunu deyilir. Təsadüfə kəmiyyətlərin paylanma qanunları müxtəlif formalarda olsa da, onların hamısından paylanma funksiyasını almaq həmişə mümkün olmalıdır. Təsadüfə kəmiyyətin ehtimalının paylanma qanunu bir sıra hallarda daha aydın və əlverişli şəkillərdə verilir. Bunların iki əsas növü ilə tanış olaq.

Diskret paylanmalar. Diskret təsadüfə kəmiyyətin paylanma qanunu.

Tutaq ki, təsadüfə X kəmiyyətinin aldığı sonlu və ya hesabı sayda $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymətləri və bu qiymətləri alma ehtimalları

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

verilmişdir. Cüt-cüt uyuşmayan

$$\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}, \dots$$

hadisələri tam sistem təşkil etdiyindən $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ şərti ödənilir.

Diskret təsadüfə X kəmiyyətinin aldığı $x_1, x_2, \dots$ qiymətlərinin və bu qiymətləri almasının $P(X = x_i) = p_i$ ehtimallarının göstərilməsi onun paylanma qanununu təyin edir. Diskret təsadüfə kəmiyyətin paylanma qanunu cədvəl şəklində verilir:

x_1	x_2	...
p_1	p_2	...

Bu cədvələ diskret təsadüfə kəmiyyətin ehtimallarının paylanma cədvəli deyilir. Diskret təsadüfə kəmiyyətin paylanma qanunu cədvəl şəklində verildikdə onun paylanma funksiyası

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

kimi tapılır. $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$ funksiyası x_i nöqtəsində kəsiləndir və bu nöqtədə sıçrayışı p_i ədədinə bərabərdir:

Kəsilməz paylanmalar. Sıqlıq funksiyası və onun xassələri.

Əgər X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlər çoxluğu hesabi çoxluq deyilsə, onda belə kəmiyyətin paylanması onun ayrı-ayrı qiymətlərinin ehtimalları ilə vermək mümkün deyildir. Bu paylanmanı ehtimalın nisbi sıxlığı vasitəsi ilə vermək daha əlverişlidir.

Tərif 2. X təsadüfi kəmiyyətinin ala biləcəyi qiymətin $[x, x + \Delta x)$ intervalına düşməsi ehtimalının bu intervalın uzunluğuna olan nisbətindən, yəni,

$$P(x \leq X < x + \Delta x) / \Delta x$$

nisbətində X kəmiyyətinin paylanmasının nisbi sıxlığı və ya ehtimalın nisbi sıxlığı deyilir. Nisbi sıxlığın $\Delta x \rightarrow 0$ olduqda limitinə X kəmiyyətinin x nöqtəsində sıxlığı deyilir və $f(x)$ ilə işarə olunur:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Axırıncı bərabərliyi $f(x) = \lim_{\Delta x} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ şəklində yazaq.

Məlumdur ki, $F(x + \Delta x) - F(x)$ fərqi təsadüfi kəmiyyətin $[x, x + \Delta x)$ intervalından qiymət alması hadisəsinin ehtimalıdır və təqribən $F(x)$ funksiyasının diferensialına bərabərdir.

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx dF(x)$$

$$F'(x) = f(x), dx = \Delta x \text{ olduğu üçün}$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx f(x) \Delta x$$

Axırıncı təqribi bərabərliyin ehtimal mənası aşağıdakı kimidir: Təsadüfi kəmiyyətin $[x, x + \Delta x)$ intervalından qiymət alması hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər dəqiqliklə sıxlıq funksiyasının x nöqtəsindəki qiyməti ilə bu intervalın Δx uzunluğu hasilinə bərabərdir.

Bu nəticəni həndəsi olaraq təsadüfi kəmiyyətin $[x, x + \Delta x)$ intervalından qiymət alması hadisəsinin ehtimalı oturacağı Δx , hündürlüyü isə $f(x)$ olan düzbucaqlının sahəsinə bərabərdir kimi söyləmək olar.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin ehtimalının paylanması paylanma funksiyası vasitəsilə təyin edilir. Paylanma funksiyalarının quruluşu isə əsasən mürəkkəb və müxtəlifdir. Lakin elə kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər vardır ki, onların paylanma funksiyası, müəyyən xassəsi olan başqa bir $p(t) \geq 0$ funksiyası vasitəsilə

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

kimi sadə şəkildə verilir. Ehtimalın paylanması ilə əlaqədar olan məsələləri belə təsadüfi kəmiyyətlər vasitəsilə öyrənmək daha əlverişlidir.

Tərif 3. Paylanma funksiyası $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ şəklində olan X təsadüfi kəmiyyətinə, mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyət, $p(t)$ funksiyasına isə onun ehtimalının paylanma sıxlığı və ya sadəcə olaraq sıxlıq funksiyası deyilir.

Praktikada təsadüf olunan kəsilməz paylanma funksiyaları bir qayda olaraq $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ şəklində göstərilə bilər, yəni mütləq kəsilməz funksiyalardır. Buna görə də mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətləri sadəcə olaraq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər adlandırırlar. (lakin bunları qarışdırmaq olmaz)

Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

$$1. p(t) \geq 0, -\infty < t < \infty$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$$

$$3. \frac{dF(x)}{dx} = p(x)$$

$$4. P(X \in A) = \int_A p(x) dx.$$

Burada A istənilən Borel çoxluğuudur.

Üçüncü xassə $p(t), t = x$ nöqtəsində kəsilməz olduqda doğrudur. Onun doğruluğu yuxarı sərhəddi dəyişən olan müəyyən inteqrallın törəməsi haqqındakı teoremdən alınır.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \text{ bərabərliyindən istənilən } x_1 < x_2 \text{ üçün}$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(t) dt$$

münasibəti alınır.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \text{ bərabərliyindən istənilən } x \text{ üçün}$$

$$P(X = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(x \leq X < x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x+\frac{1}{n}} p(t) dt = 0$$

münasibəti alınır. Buradan aydın olur ki, ixtiyari X kəsilməz təsadüfi kəmiyyəti

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2)$$

münasibətlərini ödəyir.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyası verildikdə onun paylanma funksiyası

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \text{ bərabərliyi ilə tapılır. Paylanma funksiyası isə təsadüfi kəmiyyətin}$$

ehtimalının paylanma qanununu təyin edir. Buradan aydındır ki, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin ehtimalının paylanma qanunu onun sıxlıq funksiyasının verilməsi ilə tamamilə təyin edilir

TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTDƏN ASILI FUNKSİYALAR.

X kəsilməz təsadüfi kəmiyyət olduqda $Y = aX + b$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma və sıxlıq funksiyalarını tapmaq.

Əvvəlcə $a > 0$ halına baxaq. Bu halda $g(X) = aX + b$ funksiyası monoton artan funksiyadır. Deməli,

$$F_Y(x) = P(aX + b < x) = P\left(X < \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Buradan isə

$$f_Y(x) = F'_X\left(\frac{x-b}{a}\right) = f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{1}{a}$$

$a < 0$ olduqda $g(X) = aX + b$ funksiyası monoton azalandır. Onda

$$F_Y(x) = P(aX + b < x) = P\left(X > \frac{x-b}{a}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Buradan isə

$$f_Y(x) = \left(1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)' = -f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{1}{a} = f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}$$

Beləliklə, $f_{aX+b}(x) = f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}$ olar.

X kəsilməz təsadüfi kəmiyyət və $g(x) = x^2$ olduqda $Y = g(X) = X^2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma və sıxlıq funksiyalarını tapın.

Həlli. $x \leq 0$ olduqda $F_Y(x) = P(Y < x) = 0$, $f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$

$x > 0$ olduqda $F_Y(x) = P(X^2 < x) = P(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$

$$f_Y(x) = (F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}))' = f_X(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} + f_X(-\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

Buradan

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x}))$$

Yuxarıda deyilənləri ümumiləşdirərək aşağıdakı teoremin doğruluğunu isbat etmək olar.

Teorem . X kəsilməz təsadüfi kəmiyyət, $y = g(x)$ kəsilməz və monoton funksiya olduqda $Y = g(X)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma $F_Y(x) = F(g^{-1}(x))$, sıxlıq funksiyası isə $f_Y(x) = f_Y(g^{-1}(x)) |g^{-1}(x)|$ şəklində olar.

İsbatı. $y = g(x)$ kəsilməz və monoton funksiya olduqda onun $x = g^{-1}(x)$ tərs funksiyası vardır. Onda $Y = g(X)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F_Y(x) = P(g(X) < x) = P(X < g^{-1}(x)) = F_X(g^{-1}(x))$$

olar. Beləliklə, $F_Y(x) = F(g^{-1}(x))$

$y = g(x)$ funksiyası diferensiallanan olduqda $Y = g(X)$ təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası $F_Y(x) = F(g^{-1}(x))$ funksiyasının birinci tərtib törəməsinə bərabərdir.

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = (F_X(g^{-1}(x)))'(g^{-1}(x)) = f_X(g^{-1}(x)) |g^{-1}(x)|$$

Fərz edək ki, $y = g(x)$ funksiyası kəsilməz və monoton azalan funksiyaadır. Onda onun tərs funksiyasında monoton azalandır. $Y = g(X)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası olar. $y = g(x)$ funksiyası diferensiallanan olduqda

$$P(X = g^{-1}(x)) = 0 \quad \text{və} \quad (g^{-1}(x))' < 0$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= (1 - P(X \leq g^{-1}(x)))' = -F_X'(g^{-1}(x)) = \\ &= -f_X(g^{-1}(x)) |g^{-1}(x)| = f_X(g^{-1}(x)) |g^{-1}(x)| \end{aligned}$$

alarıq. Beləliklə, $y = g(x)$ funksiyası monoton və diferensiallanan olduqda X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f_Y(x) = f_Y(g^{-1}(x)) |g^{-1}(x)|$$

şəklində olar.

Bölmə 5. Birölçülü paylanmalar. Normal paylanma ilə bağlı paylanmalar.

Birölçülü diskret paylanmalar.

Puasson paylanması

X təsadüfə kəmiyyəti $k=0,1,2,\dots$ qiymətlərini uyğun olaraq

$$\pi(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

ehtimalı ilə alırsa, onda ona λ parametrlı Puasson kəmiyyəti deyilir.

$$\pi(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k \geq 0) \text{ ardıcılılığına } \lambda \text{ parametrlı Puasson paylanması deyilir.}$$

Puasson paylanması nəzəriyyədə və əməli fəaliyyətdə (məsələn; fizikada, biologiyada, etibarlılıq və kütləvi xidmət nəzəriyyəsində) geniş tətbiq edilir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\pi(k, \lambda) > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k, \lambda) = 1$$

Həndəsi paylanma

Fərz edək ki, n sayda asılı olmayan sınaq aparılır və hər sınaqda A hadisəsinin baş vermə ehtimalı p -yə bərabərdir. Bu o deməkdir ki, hər hansı sınaqda A hadisənin baş verməsi (baş berməməsi) nüübəti sınaqlarda həmin hadisənin baş verməsinə təsir etmir.

Asılı olmayan sınaqları A hadisəsi baş verənə qədər davam etdirək. Bu sınaqların sayını X ilə işarə edək. Aydındır ki, $X = 0, 1, 2, \dots$ qiymətləri alan diskret təsadüfə kəmiyyətdir. X təsadüfə kəmiyyətinin m qiymətini alması hadisəsinin ehtimalını hesablayaq.

$X=m$ olması üçün birinci $m-1$ sınaqda A hadisəsi baş verməməli, m -ci sınaqda isə baş verməlidir. Sınaqlar asılı olmadığına görə axtarılan ehtimal

$$P(X=m) = (1-p)^{m-1} \cdot p$$

olar.

$P(X=m) = (1-p)^{m-1} p$ bərabərliyi ilə verilən ehtimallar çoxlyğyna p parametrlı həndəsi paylanma deyilir.

Hiperhəndəsi paylanma

Qutuda M sayda ağ, $N-M$ sayda isə qara hər vardır. Bəzi hallarda məmulatın keyfiyyətini yoxladıqda o, sıradan çıxır. Məsələn, məhsulun keyfiyyətinə nəzarəti həyata

keçirərkən nəzarət əməliyyatı nəticəsində məhsul satıh üçün yararsız hala düşür. Bu halda məmulatların hamısının deyil, onların müəyyən hissəsinin keyfiyyəti yoxlanılır. Tutaq ki, qutudan təsadüfə qaydada n har çıxarılmışdır. Çıxarılan harlardan m sarın ağ har olması hadisəsinin ehtimalını hesablayaq. N hardan n harı C_N^n üsulla seçmək olar. Deməli, mümkün halların sayı C_N^n -dir. Çıxarılan harlardan m harın ağ har olması hadisəsi (A) üçün əlverişli halların sayını tapaq. M ağ hardan m harı C_M^m üsulla, $N-M$ qara hardan isə $n-m$ harı C_{N-M}^{n-m} üsulla seçmək olar. Onda əlverişli halların sayı $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ olar. Beləliklə, klassik ehtimalın tərifinə görə axtarılan ehtimal

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

olar

$$h(k, N, n, m) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-m}^{m-k}}{C_N^m}$$

iharə edək. $h(k, N, n, m) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-m}^{m-k}}{C_N^m}$ bərabərliyi ilə verilən ehtimallar çoxluğuna hiperhəndəsi paylanma deyilir.

Birölçülü kəsilməz paylanmalar.

Müntəzəm paylanma

$[a, b]$ parçasında qiymət alan kəsilməz X təsadüfə kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \end{cases}$$

şəklində olduqda müntəzəm paylanmaya malik təsadüfə kəmiyyət deyilir.

Müntəzəm paylanmaya malik təsadüfə kəmiyyətin $(x, x + \Delta)$ intervalından qiymət alması x -dən asılı deyildir və parçanın Δ uzunluğu ilə mütənasibdir:

$$P(x < X < x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta} \frac{1}{b-a} dt = \frac{\Delta}{b-a}$$

X təsadüfə kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b \end{cases}$$

həkilindədir.

Normal paylanma

Normal paylanma terminini ehtimal nəzəriyyəsinə K.Pirson daxil etmişdir. Bu terminlə yanaşı, "Haus paylanması", "Haus qanunu" terminləri də işlədilir.

$$f(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty, \sigma > 0$$

bərabərliyi ilə verilən funksiya normal sıxlıq deyil. Uyğun paylanma funksiyasına isə normal paylanma funksiyası deyilir.

$$F(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$a = 0, \sigma = 1$ olduqda :

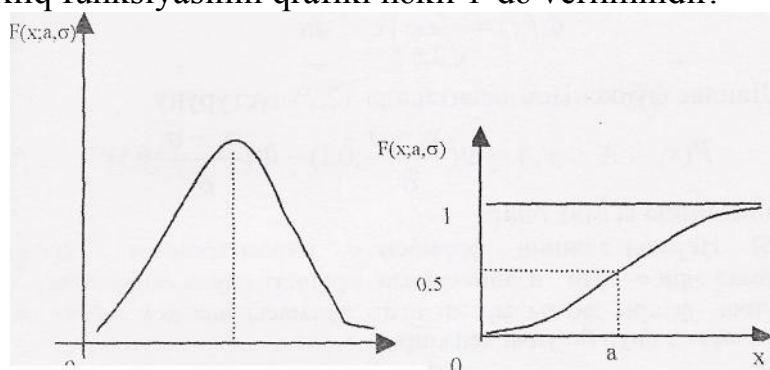
$$f(x; 0; 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

və

$$F(x; 0; 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Bu funksiylara uyğun olaraq standart normal sıxlıq və standart normal paylanma funksiyları deyilir.

Paylanma funksiyası $F(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$ bərabərliyi ilə verilən təsadüfi kəmiyyətə (a, σ^2) parametrlili normal kəmiyyət deyilir və $X \in N(a, \sigma^2)$ kimi iharə edilir. $X \in N(0, 1)$ kəmiyyətinə standart normal kəmiyyət deyilir. Normal paylanmanın və onun sıxlıq funksiyasının qrafiki həkil 1-də verilməlidir.



Şəkil 1. Normal paylanma

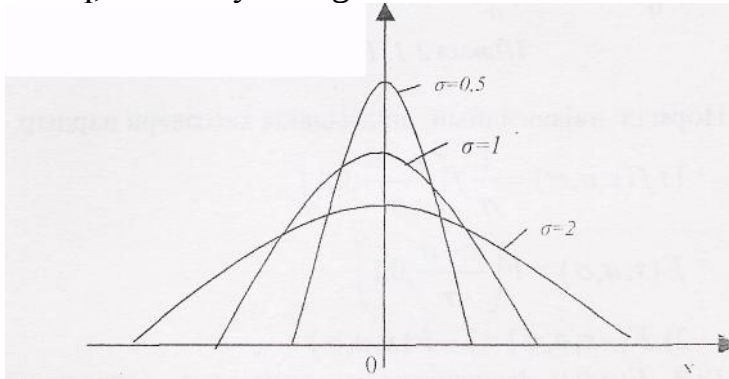
Normal paylanmanın aşağıdakı xassələri vardır:

$$1) f(x; a; \sigma) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-a}{\sigma}; 0, 1\right)$$

$$F(x; a; \sigma) = F\left(\frac{x-a}{\sigma}; 0, 1\right)$$

$$2) F(-x; a; \sigma) = 1 - F(x; a; \sigma)$$

3) Normal əyrinin forması σ parametrindən asılıdır. Normal əyri σ -nın azalması ilə ordinat oxuna sıxılaraq, onun boyunca yuxarı dartılır; σ -nın artması ilə isə absis oxuna sıxılaraq, onun boyunca genişlir.



Şəkil 2. Normal əyrinin formasının σ -dan asılılığı

$$4) f(x, 0, 1) \rightarrow 0, x \rightarrow \pm\infty$$

Axırıncı münasibət $z = 4(f(4) = 0,0001 \approx 0)$ –dən böyük olduqda təqribən ödənilir. Ona görə də bu funksiyanın qiymətləri cədvəlində argumentin $(0, 4)$ intervaldakı qiymətləri verilir.

$$F(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ integralı elementar funksiyalar ilə ifadə edilmir. Ona görə də}$$

Laplas funksiyasından istifadə edilir.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Bu integral yuxarıdan $y = f(x)$ əyrisi, aşağıdan absis oxu, soldan ordinat oxu, sağdan isə $y = x$ düz xətti ilə həddənlənmiş fiqurun sahəsinə bərabərdir.

Laplas funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

1) $\Phi(x)$ - monoton artan funksiyadır.

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0, \text{ istənilən } x \text{ üçün ;}$$

2) $\Phi(x)$ - tək funksiyadır, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (qrafiki absis oxuya nəzərən simmetrikdir). Xüsusi halda $\Phi(0) = 0$.

3) $\Phi(x) \rightarrow 0,5, x \rightarrow \infty$. Bu xassə laplas integralından alınır. $\Phi(4) = 0,49997 \approx 0,5$ və monoton olduğu üçün təcrübədə kifayət qədər dəqiqliklə $\Phi(x) = 0,5$, $x \geq 4$ qəbul etmək olar.

Üç sigma qanunu.

$$P(|X - a| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Düsturunda $\varepsilon = t\sigma$ qəbul etsək

$$P(|X - a| < t\sigma) = 2\Phi(t)$$

olduğunu alırıq. Xüsusi halda $t = 3$ qəbul edərək, $\Phi(3) = 0,4986$ olduğunu nəzərə alsaq $\Phi(3) = 0,4986$

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9972$$

olduğunu yaza bilərik. Bahqa sözlə, $|X - a| > \varepsilon$ hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər kiçik 0.0028 ədədinə bərabərdir. Bu isə o deməkdir ki, $|X - a| > \varepsilon$ hadisəsi orta hesabla 10000 haldan 27-də bahverə bilər. Yəni bu hadisə praktiki olaraq mümkün olmayan hadisədir. Üç siqma qanununun mahiyyəti də məhz bundan ibarətdir.

Loqarifmik normal paylanma. Pareto paylanması.

Ehtimal modellərinin qurulmasında yormal təsadüfi kəmiyyətlərdən asılı qeyri xətti funksiyaların paylanmasına tez-tez təsadüf edilir. Məsələn, texniki- iqtisadi göstəricilərin modelləşdirilməsində loqarifmik normal paylanmada istifadə edilir.

Tutaq ki, Y təsadüfi kəmiyyəti müsbətdir. Əgər bu təsadüfi kəmiyyətin loqarifmi - $X = \ln Y$ normal paylanarsa, onda ona loqarifmik-normal paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. Tərifdən aydın olur ki, $Y = e^X$.

Y təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasını tapaq:

$$P(\ln X < \ln x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}} d(\ln t),$$

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\ln x} e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$f(x, a, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}$$

Bu paylanmadan gəlirlərin bölühdürülməsi, əmanət qoyulmalarının, aylıq əmək haqqının və əkin sahələrinin paylanmasının tədqiqində geniş surətdə istifadə edilir.

Pareto paylanması.

Pareto paylanmasından iqtisadi statistikada geniş surətdə istifadə edilir. Məsələn, vergi orqanları vergi məcəlləsi ilə müəyyən edilmiş qaydalara əsasən illik gəlirləri müəyyən sərhəddən - x_0 -dan çox olan həxslərin gəlirlərinin paylanmasını müəyyən edirlər. Bu və digər bir sıra paylanmalar Pareto paylanması ilə bilavasitə bağlıdır. Pareto paylanmasının

paylayma funksiyası aşağıdakı həkildədir:

$$P(X > x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, x > x_0, \alpha > 0$$

Sıxlıq funksiyası isə $x > x_0$ olduqda $\frac{\alpha}{x_0} \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\alpha-1}$, $x \leq x_0$ olduqda isə sıfır

Normal paylanma ilə bağlı paylanmalar.

"Xi- kvadrat " paylanma

Tutaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan standart normal kəmiyyətlərdir. Onda

$$u^2(n) = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ C_n x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

bərabərliyi ilə verilir. $f_{\chi^2}(x)$ funksiyası "xi-kvadrat" sıxlıq, bu sıxlığın təyin etdiyi paylanma funksiyası isə 'xi-kvadrat' paylanma adlanır. n ədədinə sərbəstlik dərəcəsi deyilir. $u^2(n)$ kəmiyyətinin sərbəstlik dərəcəsi onun ifadəsindəki asılı olmayan dəyişənlərin sayı ilə müəyyən edilir.

'xi- kvadrat' paylanması aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) n - nin böyük ($n > 30$) qiymətlərində 'xi- kvadrat' paylanma normal paylanmaya yaxınlaşır.

2) Tutaq ki, U_1^2 və U_2^2 sərbəstlik dərəcələri uyğun olaraq n_1 və n_2 olan 'xi- kvadrat' paylanmaya malik asılı olmayan kəmiyyətlərdir. Onda $U_1^2 + U_2^2$ kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi $n_1 + n_2$ olan 'xi- kvadrat' paylanmaya malikdir.

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{U^2(n) - n}{\sqrt{2n}} < x\right) = \Phi(x; 0; 1)$$

Tutaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan kəmiyyətlərdir və $X_i \in N(a, \sigma^2)$ $i = 1, 2, \dots, n$. Onda $Y_i = \frac{X_i - a}{\sigma} \in N(0, 1)$ olar. Beləliklə, $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - a}{\sigma} \right)^2$ təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi n olan "xi-kvadrat" paylanmaya malikdir.

"xi-kvadrat" paylanmanın böhran nöqtələri cədvəli ihlənib hazırlanmışdır. Üçüncü xassəyə görə $U^2(n)$, $n = 1, 2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı asimptotik normal paylanmaya malikdir. Ona görə də cədvəldə böhran nöqtələri sərbəstlik dərəcəsinin $n < 30$ qiymətləri üçün verilməmişdir. $n > 30$ olduqda böhran nöqtəsini tapmaq üçün normal paylanmanın qiymətləri cədvəlindən istifadə etmək olar.

Fiher-Snedekor paylaması (F- paylanma)

Tutaq ki, X_1 və X_2 asılı olmayan və sərbəstlik dərəcələri uyğun olaraq n_1, n_2 olan 'xi-kvadrat' paylanmasına malikdirlər. Bu halda $\frac{X_1}{n_1} : \frac{X_2}{n_2}$ nisbətinin sıxlıq funksiyası, ancaq n_1 və n_2 ədədlərindən asılıdır və

$$f_F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ C_n \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & x > 0 \end{cases}$$

$f_F(x)$ funksiyası Fiher-Snedekor sıxlığı, bu sıxlığın təyin etdiyi paylanma funksiyası isə Fiher-Snedekor paylanması adlanır.

Aydındır ki, $X_i \in N(a, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n_1 + n_2$ olduqda

$$F(n_1, n_2) = \frac{\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - a)^2}{\frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (X_i - a)^2}$$

təsadüfə kəmiyyəti Fiher-Snedekor paylanmasına malikdir.

"Fiher - Snedekor" paylanmasının böhran nöqtələri cədvəli ihlənib hazırlanmışdır. n_1 və n_2 -nin böyük qiymətlərində bu paylanmanı normal paylanma ilə əvəz etmək olar.

Styudent paylanması (t-paylanma)

Tutaq ki, $X \in N(0,1)$ və Y sərbəstlik dərəcəsi n olan "xi-kvadrat" paylanmasına malik asılı olmayan kəmiyyətlərdir.

Onda $f(n) = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ ölçüsüz kəmiyyəti Styudent nisbəti adlanır və bu nisbətin sıxlıq

funksiyası

$$f_t(x) = C_n \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < x < \infty$$

bərabərliyi ilə verilir. $f_t(x)$ funksiyası Styudent sıxlığı, bu sıxlığın təyin etdiyi funksiya isə Styudent paylanması adlanır. n -ədədinə isə Styudent paylanmasının sərbəstlik dərəcəsi deyilir.

Tutaq ki, $X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ asılı olmayan təsadüfə kəmiyyətlərdir və $X \in N(0,1), Y_i \in N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$. Onda $\frac{X}{\sigma}$ təsadüfə kəmiyyətləri də asılı deyillər və $Y_i \in N(0,1), i = 1, 2, \dots, n$.

Normal, “ χ^2 – kvadrat”, Fisher – Snedekor və Student paylanmaları arasında aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$t^2(n) = F(1, n); F(n, \infty) = \frac{\chi^2(n)}{n}, \chi^2(1) = U^2$$

Student paylanması üçün

$$P(|t| > t_0) = 2 \int_{t_0}^{\infty} S_n(x) dx = 2(1 - S_n(t))$$

münasibəti doğrudur.

Tutaq ki, $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və $X_i \in N(0, \sigma^2), i = 0, 1, \dots, n$ aydındır ki, $Y_i = \frac{X_i}{\sigma}$ təsadüfi kəmiyyətləri asılı deyillər və $Y_i \in N(0, 1), i = 0, 1, \dots, n$.

Onda

$$F(X, \sigma) = P\left\{ \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}} < x \right\} = P\left\{ \frac{\sigma Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma Y_i)^2}} < x \right\} =$$

$$= P\left\{ \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}} < x \right\} = F(x, 1)$$

Beləliklə, Student paylanması σ parametrindən asılı deyil.

Tutaq ki, $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və $X_i \in N(a, \sigma)$. Onda $X_i - a$ təsadüfi kəmiyyətləri də asılı deyillər və $X_i - a \in N(0, 1)$. Beləliklə,

$$t_n = \frac{X_0 - a}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}}$$

təsadüfi kəmiyyəti Student paylanmasına malikdir.

Student sıxlığı $n \rightarrow \infty$ hərtində standart normal sıxlığa yığılır, yəni

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow s(x, n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ona görə böyük n -lər üçün $P(t < t_0)$ ehtimalını Laplas funksiyası vasitəsilə ifadə etmək olar.

$$P(t < t_0) = S(t, n) = C \int_{-\infty}^{t_0} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx \approx 0.5 + \phi(t_0)$$

Student paylanmasının böhran nöqtələri cədvəli ihlənib hazırlanmışdır. Sərbəstlik dərəcəsinin böyük qiymətlərində bu paylanmanı normal paylanma ilə əvəz etmək olar.

Student paylanmasından orta qiymətin hipotetik orta ilə müqayisəsi haqqında və iki orta qiymətin müqayisəsi haqqında hipotezlərin yoxlanılmasında istifadə edilir.

Styudent, Fiher və “xi-kvadrat” paylanmaya malik bəzi xarakteristikalar.

Teorem 1. Tutaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan (a, σ^2) parametrlı normal təsadüfı kəmiyyətlərdir. Onda $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ təsadüfı kəmiyyəti $\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ parametrlı normal təsadüfı kəmiyyətdir.

İsbatı: Ehtimal nəzəriyyəsiindən məlymdyr ki, asılı olmayan normal təsadüfı kəmiyyətlərin cəmi də normal təsadüfı kəmiyyətdir.

Riyazi gıözləmə və dispersiyanın məlym xassələrinə əsasən

$$M\bar{X} = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a = a$$

Bə

$$D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

oldyğyny alırıq. Beləliklə $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ kəmiyyəti $\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ parametrlı normal təsadüfı kəmiyyətdir.

Nəticə 1. $Z = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$ normallaşdırılmış təsadüfı kəmiyyəti $(0;1)$ parametrlı normal paylanmaya malikdir:

$$M \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \cdot M(\bar{X} - a) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (a - a) = 0$$

$$D \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{n}{\sigma^2} D(\bar{X} - a) = \frac{n}{\sigma^2} D\bar{X} = \frac{n}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = 1$$

Tutaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan (a, σ^2) parametrlı normal təsadüfı kəmiyyətlərdir və $EX = a$ riyazi gıözləməsi məlymdyr.

$$S_*^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$$

təsadüfı kəmiyyətinin paylanmasını tapaq. Bu məqsədlə axırıncı bərabərliyin sağ tərəfini aşağıdakı kimi çevirək:

$$S_*^2 = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - a}{\sigma} \right)^2.$$

Onda

$$\frac{nS_*^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - a}{\sigma} \right)^2$$

olar

$$U = \frac{nS_*^2}{\sigma^2}, \quad U_i = \frac{X_i - a}{\sigma}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

işarə edək.

$$MU_i = \frac{1}{\sigma} M(X_i - a) = 0$$

$$DU_i = \frac{1}{\sigma^2} D(X_i - a) = \frac{1}{\sigma^2} DX_i = 1$$

Deməli, $U_1, U_2, \dots, U_n$ təsadüfə kəmiyyətləri asılı olmayan $(0;1)$ parametrlə normal kəmiyyətlərdir və

$$U = \sum_{i=1}^n U_i^2$$

Beləliklə, U - sərbəstlik dərəcəsi n olan χ^2 paylanmaya malik təsadüfə kəmiyyətdir. Yuxarıda deyilənləri aşağıdakı teoremlə basitəsilə ifadə etmək olar.

Teoremlər 2. Tytaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan və (a, σ^2) parametrlə normal təsadüfə kəmiyyətlərdir. Onda

$$U = \frac{nS_*^2}{\sigma^2}$$

kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi n olan χ^2 paylanmaya malik təsadüfə kəmiyyətdir.

Teoremlər 3. Tytaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan və (a, σ^2) parametrlə normal təsadüfə kəmiyyətlərdir və $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Onda $V = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n-1}$

təsadüfə kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi $n-1$ olan Stuydent paylanmasına malikdir.

İsbatı. Teoremi isbat etmək üçün B -ni iki təsadüfə kəmiyyətin nisbəti şəklində göstərmək lazımdır. Belə ki, kəsrin syratında $(0,1)$ parametrlə normal təsadüfə kəmiyyət, məxrəcində isə χ^2 paylanmaya malik təsadüfə kəmiyyətin onyn sərbəstlik dərəcəsinə nisbətinin kvadrat küçünə nisbəti olmalıdır.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$V = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n-1} = \left(\frac{\bar{X} - a}{\sigma} \sqrt{n} : \frac{S \sqrt{n}}{\sigma} \right) \cdot \sqrt{n-1}$$

bərabərliyi doğrudur.

$$M \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} M(\bar{X} - a) = 0$$

$$D \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{n}{\sigma^2} D(\bar{X} - a) = \frac{n}{\sigma^2} \cdot D\bar{X} = \frac{n}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = 1$$

Deməli, $\frac{\bar{X} - a}{\sigma} \sqrt{n}$ $(0;1)$ parametrlə normal paylanmaya malik təsadüfə

kəmiyyətdir. Digər tərəfdən $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ - sərbəstlik dərəcəsi $n-1$ olan χ^2 paylanmaya malikdir. By

isə sübut edir ki, $V = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n-1}$ sərbəstlik dərəcəsi $n-1$ olan Stuydent paylanmasına malikdir.

Teorem 4. $X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan (a, σ^2) parametrlı normal təsadüfı kəmiyyətlərdir. Onda $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ və $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ təsadüfı kəmiyyətləri asılı deyillər. $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi $n-1$ olan χ^2 -paylanmaya malikdir.

Nəticə. $T = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n-1}}{S}$ təsadüfı kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi $n-1$ olan Styudent paylanmasına malikdir. Doğrudan da,

$$\frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma} \in N(0,1), \quad \frac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1) \text{ olduğu üçün tərifə görə}$$

$$\frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma} / \sqrt{\frac{nS^2}{\sigma^2(n-1)}} = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n-1}}{S}$$

sərbəstlik dərəcəsi $n-1$ Styudent paylanmasına malik olar.

Bölmə 6. Təsadüfı vektorlar (çoxölçülü təsadüfı kəmiyyətlər)

Təsadüfı vektor (çoxölçülü təsadüfı kəmiyyət) anlayışı.

Eyni bir elementar hadisələr fəzasında iki və daha çox təsadüfı kəmiyyət təyin edilə bilər. Belə zərurət obyekt bir neçə təsadüfı parametrlər ilə xarakterizə edildikdə yaranır. Məsələn, təsadüfı seçilmiş bir ailənin xərclərin quruluşunun ehtimal (stoxastik) modelləşdirilməsində ərzaqa, ayaqqabıya, paltara, kommunal xərclərə, nəqliyyata, mədəni tələbata və s. xərclər eyni bir elementar hadisələr fəzasında təyin edilmiş təsadüfı kəmiyyətlərdir.

Tutaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ eyni bir Ω elementar hadisələr fəzasında təyin edilmiş təsadüfı kəmiyyətlərdir. Bu təsadüfı kəmiyyətlərə $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ n -ölçülü vektorunun kordinatları kimi baxmaq olar. Beləliklə, hər bir ω elementar hadisəsinə n sayda təsadüfı kəmiyyətin nizamlanmış $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ yığımını (n ölçülü təsadüfı vektorunu) qarşı qoymaq olar.

Tərif 1. Kordinatları eyni Ω elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ vektoruna n -ölçülü təsadüfı vektor (n -ölçülü təsadüfı kəmiyyət) deyilir.

Bu təsadüfı vektor Ω elementar hadisələr fəzasında təyin olunub və onun qiymətlər oblastı R^n -dir.

Təsadüfı vektorun paylanma və sıxlıq funksiyası

Tərif 2. $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \prec x_1, \dots, X_n \prec x_n)$ funksiyasına n -ölçülü paylanma funksiyası və yaxud $X_1, \dots, X_n$ kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası deyilir.

Bu funksiya bütün R^n fəzasında təyin olunub. $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ vektoruna R^n fəzasının nöqtəsi kimi baxdıqda, onun n -ölçülü paylanma funksiyası $(X_1, \dots, X_n)$ nöqtəsinin $(-\infty, x)_n = (t_1 \prec x_1, \dots, t_n \prec x_n)$ n -ölçülü intervalına düşmə ehtimalı olur.

Təsadüfi vektorun paylanma funksiyası onun paylanma qanununu təyin edir.

Təsadüfi vektorun mümkün qiymətlər çoxluğu sonlu və yaxud hesabi çoxluq olduqda ona diskret təsadüfi vektor deyilir. Bu halda

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

Burada, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ n -ölçülü ədədi vektordur.

Diskret təsadüfi vektor mümkün qiymətlərinin - $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorlarının və $p_1 = P(X = x_1), p_2 = P(X = x_2), \dots, p_n = P(X = x_n)$ ehtimallarının verilməsi ilə birqiymətli təyin edilir.

Tərif 3. $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \prec x_1, \dots, X_n \prec x_n)$ funksiyası mütləq kəsilməz, yəni

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

olduqda, $(X_1, \dots, X_n)$ vektoruna kəsilməz vektor, $f(x_1, \dots, x_n)$ - nə isə onun sıxlıq funksiyası və yaxud ehtimalların paylanma sıxlığı deyilir.

Sıxlıq funksiyası paylanma funksiyası ilə yanaşı n -ölçülü təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu təyin edir.

Diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün $A \subset R^n$ n -ölçülü fəzasının hər hansı altçoxluğu olduqda $P(X \in A)$ ehtimalı $P(X = x_i), x_i \in A$ ehtimallarının cəminə bərabərdir:

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} P(X = x_i)$$

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər üçün $\{X \in A\} \in S$ olduqda $P(X \in A)$ ehtimalı n -ölçülü sıxlıq funksiyasının A çoxluğu üzrə n -ölçülü inteqralına bərabərdir:

$$P(X \in A) = \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Sıxlıq funksiyasının xassələri.

$$1) f(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \int_{R^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

$$2) f(x_1, \dots, x_n) \text{ sıxlıq funksiyasının } (x_1, \dots, x_n) \text{ kəsilməyənlik nöqtələrində}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər.

Tərif 4. İstənilən $x_1, x_2, \dots, x_n$ üçün $\{\omega: X_1(\omega) < x_1\}, \{\omega: X_2(\omega) < x_2\}, \dots, \{\omega: X_n(\omega) < x_n\}$ hadisələri asılı olmadıqda $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfə kəmiyyətlərinə asılı olmayan təsadüfə kəmiyyətlər deyilir.

Tərifdən bulavasitə aydın olur ki, asılı olmayan $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfə kəmiyyətləri üçün $X = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfə vektorunun paylanma funksiyası $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfə kəmiyyətlərinin paylanma funksiyalarının hasilinə bərabərdir:

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n)$$

İki ölçülü təsadüfə vektor üçün

$$F_X(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

və yaxud

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = P(X_1 < x_1)P(X_2 < x_2)$$

Asılı olmayan təsadüfə kəmiyyətlərin tərifə axırıncı şərt vasitəsi ilə də verilə bilər.

$(X_1, \dots, X_n)$ təsadüfə vektoru kəsilməz və $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfə kəmiyyətləri asılı olmadıqda

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n)$$

diskret olduqda isə

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\} \dots P\{X_n = x_n\}$$

Teorem 1. X_1, X_2 təsadüfə kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün $P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = P(X_1 < x_1)P(X_2 < x_2)$ şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

İsbatı.a) Zərurilik. Tutaq ki, X_1, X_2 asılı deyillər. Onda $A = \{X_1 < x_1\}, B = \{X_2 < x_2\}$ hadisələri də asılı deyil. Beləliklə,

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = P(X_1 < x_1)P(X_2 < x_2)$$

və ya

$$F_X(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

oduğunu alırıq.

b) Kafilik. Tutaq ki, $F_X(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$

Buradan

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = P(X_1 < x_1)P(X_2 < x_2)$$

olduğu alınır. Bu isə tərifə görə X_1, X_2 kəmiyyətlərinin asılı olmadığını göstərir.

Beləliklə, bu şərtlər asılı olmayan təsadüfə kəmiyyətlərin tərifə eynigüclüdür.

Nəticə 1. Kəsilməz X_1 və X_2 kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün onların birgə sıxlıq funksiyasının komponentlərin sıxlıq funksiyalarının hasilinə bərabər olması zəruri və kafidir:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

Nəticənin doğruluğu $F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n)$ münasibətinin hər iki tərəfini diferensiaslamaq və integrallamaqla alınır.

$X_1, \dots, X_n$ diskret təsadüfə kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \dots P(X_n = x_n)$$

və yaxud $P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2) \dots P(X_n \in A_n)$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir

İstənilən $A_1, A_2, \dots, A_n$ ədədi çoxluqları üçün

$$P\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n\} = P\{X_1 \in A_1\}P\{X_2 \in A_2\} \dots P\{X_n \in A_n\}$$

şərtinin ödənilməsi $X_1, X_2, \dots, X_n$ kəsilməz təsadüfə kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün zəruri və kafi şərtidir.

Bundan sonra təsadüfə vektorun digər xassələrini iki ölçülü vektorların misalında öyrənəcəyik.

İki ölçülü paylanma funksiyasının xassələri.

1. Paylanma funksiyasının qiymətlər oblastı $[0,1]$ parçasıdır:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1$$

Xassənin doğruluğu bilavasitə paylanma funksiyasının tərifindən alınır. Belə ki, ehtimal həmişə mənfi olmayan və vahidi aşmayan ədəddir.

2. $F(x, y)$ paylanma funksiyası hər bir argumentə görə azalmayan funksiyadır, yəni

$$x_1 < x_2 \text{ olduqda } F(x_1, y) \leq F(x_2, y);$$

$$y_1 < y_2 \text{ olduqda } F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$$

$F(x, y)$ - funksiyasının x argumentinə görə azalmayan olduğunu göstərək:

Qeyd edilmiş y üçün $(X < x_2, Y < y)$ hadisəsini uyuşmayan iki

$$(X < x_1, Y < y), (x_1 \leq X < x_2, Y < y)$$

hadisələrinin cəmi şəklində göstərmək olar. Ehtimalların toplama teoreminə əsasən

$$P(X < x_2, Y < y) = P(X < x_1, Y < y) + P(x_1 \leq X < x_2, Y < y)$$

$$\text{Buradan, } F(x_2, y) - F(x_1, y) = P(x_1 \leq X < x_2, Y < y) \geq 0$$

Beləliklə, $x_1 < x_2$ olduqda $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$ olar.

Bu xassə paylanma funksiyasının həndəsi mənasından daha aydın olur. Belə ki, $F(x, y)$, (X, Y) təsadüfə vektorunun təpə nöqtəsi (x, y) olan kvadrantına düşməsi hadisəsinin ehtimalıdır. x -in artması ilə bu kvadrantın sağ sərhədi sağa hərəkət edir. Yəni, $x_1 < x_2$ olduqda təpə nöqtəsi (x_1, y) olan kvadrant təpə nöqtəsi (x_2, y) olan kvadranta daxildir. Ona görə də (X, Y) təsadüfə vektorunun təpə nöqtəsi (x_2, y) olan kvadranta düşməsi hadisəsinin ehtimalı, onun təpə nöqtəsi (x_1, y) olan kvadranta düşməsi hadisəsinin ehtimalından kiçik deyildir.

Eyni qayda ilə $F(x, y)$ funksiyasının ikinci argumentə görə də azalmayan olduğunu göstərmək olar.

3. Aşağıdakı limit münasibətləri doğrudur:

$$1) x \rightarrow -\infty \Rightarrow F(x, y) \rightarrow F(-\infty, y) = 0; y \rightarrow -\infty \Rightarrow F(x, -\infty) = 0$$

$$2) x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty \Rightarrow F(x, y) \rightarrow F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$3) x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty \Rightarrow F(x, y) \rightarrow F(\infty, \infty) = 1$$

$$4) x \rightarrow \infty \Rightarrow F(x, y) \rightarrow F(\infty, y) = F_Y(y) = F_2(y)$$

$$5) y \rightarrow \infty \Rightarrow F(x, y) \rightarrow F(x, \infty) = F_X(x) = F_1(x)$$

$(X < -\infty, Y < y)$ hadisəsi mümkün olmayan hadisədir. Ona görə də

$$F(-\infty, y) = P(X < -\infty, Y < y) = 0$$

$x \rightarrow -\infty$ olduqda təpə nöqtəsi (x, y) olan kvadrantın sağ sərhəddi sonsuz olaraq sola hərəkət edir və (X, Y) təsadüfi vektorunun bu kvadranta düşməsi hadisəsinin ehtimalı sıfıra bərabər olur.

Eyni qayda ilə $Y \rightarrow -\infty, (X \rightarrow -\infty, Y \rightarrow -\infty)$ hadisələri mümkün olmayan hadisələr olduğu üçün $F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$

$(Y \rightarrow \infty)$ hadisəsi yəqin hadisədir və $(X \rightarrow x, Y \rightarrow \infty)$ hadisəsi $(X \rightarrow x)$ hadisəsi ilə eynigüclüdür. Ona görə də

$$F(x, \infty) = P(X \rightarrow x) = F_X(x) = F_1(x)$$

Eyni qayda ilə $F(\infty, y) = P(Y \rightarrow y) = F_Y(y) = F_2(y)$

Təsadüfi vektorun yarımzolaqa və düzbucaqlıya düşmə ehtimalları.

Təsadüfi vektorun $[(x, y): x_1 \rightarrow x \rightarrow x_2, -\infty \rightarrow y \rightarrow \infty]; [(x, y): -\infty \rightarrow x \rightarrow \infty, y_1 \rightarrow y \rightarrow y_2]$ yarımzolaqlarına və $[(x, y): x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2]$ düzbucaqlısına düşmə ehtimallarını paylanma funksiyası vasitəsi ilə vermək olar:

$$P(x_1 \leq X \rightarrow x_2, Y \rightarrow y) = P(X \rightarrow x_2, Y \rightarrow y) - P(X \rightarrow x_1, Y \rightarrow y) = F(x_2, y) - F(x_1, y)$$

$$P(X \rightarrow x, y_1 \leq Y \rightarrow y_2) = P(X \rightarrow x, Y \rightarrow y_2) - P(X \rightarrow x, Y \rightarrow y_1) = F(x, y_2) - F(x, y_1)$$

Beləliklə, (X, Y) təsadüfi vektorunun

$$[(x, y): x_1 \rightarrow x \rightarrow x_2, -\infty \rightarrow y \rightarrow \infty]; [(x, y): -\infty \rightarrow x \rightarrow \infty, y_1 \rightarrow y \rightarrow y_2]$$

yarımzolaqlarına düşmə ehtimalları paylanma funksiyasının uyğun arqumentlərə görə artımına bərabərdir.

$X = x_1, X = x_2, Y = y_1, Y = y_2$ düz xətləri ilə həddlanmış düzbucaqlıya baxaq. (X, Y) təsadüfi vektorunun bu düzbucaqlıya düşmə ehtimalını hesablayaq. Axtarılan ehtimal

təsadüfi vektorun

$[(x, y): x_1 \rightarrow x \rightarrow x_2, -\infty \rightarrow y \rightarrow \infty]; [(x, y): -\infty \rightarrow x \rightarrow \infty, y_1 \rightarrow y \rightarrow y_2]$

yarımzolaqlarına düşmə ehtimallarının fərqinə bərabərdir:

$$P(x_1 \leq X \rightarrow x_2, y_1 \leq Y \rightarrow y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]$$

Şerti paylanma funksiyaları və şerti ehtimal sıxlıqları.

Tuaq ki, $Z = (X, Y)$ ikiölçülü diskret təsadüfi vektordur. $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ mümkün qiymətlərini uyğun olaraq

$= p_n$,

$$P(X = x_1) = p_1, P(X = x_2) = p_2, \dots, P(X = x_n)$$

$$Y \text{ isə } P(Y = y_1) = p'_1, P(Y = y_2) = p'_2, \dots, P(Y = y_m) = p'_m$$

ehtimalları ilə alır.

$(X = x_i, Y = y_1), (X = x_i, Y = y_2), \dots, (X = x_i, Y = y_m)$ hadisələrinin tam sistem təşkil etdiyini nəzərə alsaq

$$p_i = P(X = x_i) = P\{(X = x_i) \cap \Omega\} = P\left\{(X = x_i) \cap \left(\sum_{j=1}^m (Y = y_j)\right)\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^m P\{(X = x_i) \cap (Y = y_j)\} = \sum_{j=1}^m p_{ij}$$

olduğunu yazabilirik. Deməli, $p_i = \sum_{j=1}^m p_{ij}$.

Eyni qayda ilə $(X = x_1, Y = y_j), (X = x_2, Y = y_j), \dots, (X = x_m, Y = y_j)$ hadisələri tam sistem təşkil etdiyinə görə $p'_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij}$ olar.

Deməli, $p'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}$. Aydın ki, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$.

X təsadüfi kəmiyyətinin $Y = y_j$ şərti daxilində şərti paylanması

$$f_X(x_i / y_j) = P\{X = x_i / Y = y_j\}$$

kimi işarə edilir. Şərti paylanma

$$P\{X = x_i / Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p'_j}$$

kimi təyin edilir.

Qeyd edilmiş y_j üçün $f_X(x_i / y_j)$ ehtimallarının cəmi vahidə bərabərdir. Doğrudan da

$$\sum_{i=1}^n f_X(x_i / y_j) = \sum_{i=1}^n \frac{p_{ij}}{p'_j} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ij}}{p'_j} = 1.$$

Eyni

qayda

ilə

$$\sum_{j=1}^m f_X(y_j / x_i) = 1$$

$$\text{Doğrudan da, } \sum_{j=1}^m \frac{p_{ij}}{p_i} = \frac{\sum_{j=1}^m p_{ij}}{p_i} = 1$$

İndi isə $Z = (X, Y)$ kəsilməz təsadüfi vektorunun şərti paylanmalarını təyin edək. Tərifə görə X təsadüfi kəmiyyətinin ehtimallarının paylanmasının şərti sıxlığı $Y = y_0$ olduqda

$$f_X(x / y_0) = \frac{f_Z(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

kimi, Y təsadüfi kəmiyyətinin ehtimallarının paylanmasının şərti sıxlığı isə $X = x_0$ olduqda

$$f_Y(y / x_0) = \frac{f_Z(x_0, y)}{f_X(x_0)}$$

düsturu ilə hesablanır.

Ehtimalların paylanmasının şərti sıxlığı sıxlıq funksiyasının bütün xassələrinə malikdir. Xüsusi halda $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x / y) dx = 1$ olduğunu göstərək.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x/y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_Z(x,y)}{f_Y(y)} dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x,y) dx = \frac{1}{f_Y(y)} f_Y(y) = 1$$

Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y/x) dy = 1$

Ehtimalların vurulması teoreminə görə

$$f(x,y) = f_2(y)f_1(x/y) = f_1(x)f_2(y/x)$$

olar. Axırıncı düstura sıxlıq funksiyalarının vurma düsturu deyilir.

X və Y kəmiyyətləri asılı olmadıqda

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ vektorları üçün

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2/x_1)f_3(x_3/x_1, x_2) \dots f_n(x_n/x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ -asılı olmadıqda isə

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$$

Təsadüfi vektorin komponentlərinin paylanma və sıxlıq funksiyalarının təyini.

Tutaq ki, $X = (X_1, X_2)$ sıxlıq funksiyası $f(x_1, x_2)$ olan kəsilməz təsadüfi vektordur. X_1 və X_2 kəmiyyətlərinin sıxlıq funksiyalarını tapaq. X_1 təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$F_{X_1}(x_1) = F_X(x_1, \infty) = \int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y_1, y_2) dy_2 \right) dy_1 = f_{X_1}(y_1)$$

olar. Axırıncı bərabərlikdə y_1 - in hər bir qeyd edilmiş qiyməti üçün mötərizə daxilindəki integral müəyyən ədədi qiymət alır. Beləliklə, o y_1 --in funksiyasıdır. Bu funksiyanı $f_{X_1}(y)$ ilə işarə edək:

$$f_{X_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y_1, y_2) dy_2$$

Onda

$$F_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(y_1) dy_1$$

Bu isə paylanma funksiyasının tərifinə əsasən o deməkdir ki, $f_{X_1}(y_1)$, X_1 təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasıdır. Deməli, birölçülü X_1 təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası $X = (X_1, X_2)$ ikiölçülü təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasından

$$f_{X_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y_1, y_2) dy_2 \text{ düsturu vasitəsilə alınır.}$$

Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, X_2 təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) dx_1$$

şəklindədir.

Ümumi şəkildə $X = (X_1, \dots, X_n)$ n -ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası məlum olduqda, m -ölçülü $Y = (X_1, X_2, \dots, X_m), m < n$ təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f_Y(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n$$

kimi olar.

Şərti riyazi gözləmə

Yuxarıda qeyd etdik ki, hər hansı X təsadüfi kəmiyyətinin başqa bir Y təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən şərti paylanma qanununu vermək olar.

Diskret X təsadüfi kəmiyyətinin $Y = y_j$ olduqda şərti riyazi gözləməsi dedikdə X -in mümkün qiymətlərinin onların uyğun şərti ehtimallara hasillərinin cəmi nəzərdə tutulur:

$$\bar{y}_i = E(X = x_i / Y = y_j) = \sum_{j=1}^m y_j P(X = x_i / Y = y_j)$$

Eyni qayda ilə Y təsadüfi kəmiyyətinin $X = x_i$ olduqda şərti riyazi gözləməsi dedikdə Y -in mümkün qiymətlərinin onların uyğun şərti ehtimallara hasillərinin cəmi nəzərdə tutulur.

$$\bar{y}_i = E(X = x_i / Y = y_j) = \sum_{j=1}^m y_j P(X = x_i / Y = y_j)$$

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$$E(Y / X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y dF(y / x)$$

Burada $F(y / x)$ Y -in X -ə nəzərən şərti paylanma funksiyasıdır.

Şərtsiz və şərti riyazi gözləmələr arasında əlaqə düsturunu vermək olar.

Tutaq ki, $B_1, B_2, \dots, B_n$ hadisələri tam sistem təşkil edir. X təsadüfi kəmiyyətinin bu hadisələrə nəzərən şərti paylanma funksiyalarını uyğun olaraq $F(X / B_1), F(X / B_2), \dots, F(X / B_n)$ ilə işarə edək. X kəmiyyətinin şərtsiz paylanma funksiyasını isə $F(x)$ ilə işarə edək. Onda tam ehtimal düsturuna əsasən

$$P(X < x) = F(x) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(X < x / B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i) F(x / B_i)$$

Şərti riyazi gözləmənin ifadəsini nəzərə alsaq X təsadüfi kəmiyyətinin şərtsiz riyazi gözləməsini belə yazmaq olar:

$$EX = \sum_{i=1}^n P(B_i) E(X / B_i)$$

$$EX = E[E(X / B_i)]$$

Təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin paylanma funksiyasının tapılması.

Ehtimal modellərinin qurulmasında təsadüfə kəmiyyətlərdən asılı funksiyalara tez-tez təsadüf edilir. Xüsusi halda iki təsadüfə kəmiyyətin paylanma funksiyasının tapılması məsələsinə baxaq.

Tutaq ki, $X = (X_1, X_2): Y = f(X) = X_1 + X_2$. Y təsadüfə kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasını tapaq.

$$F_Y(x) = P\{X_1 + X_2 \leq x\} = \iint_{A_x} f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Burada inteqrallama $A_x = \{(x_1, x_2): x_1 + x_2 \leq x\}$ çoxluğu üzrə aparılır. x_1 -in qeyd edilmiş qiymətində x_2 dəyişəni $(-\infty, x - x_1)$ intervalında qiymət alır. Onda

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-x_1} f_X(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$

olduğunu yaza bilərik. Daxili inteqralda $x_2 = t - x_1$ əvəzləməsi aparsaq

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^x f_X(x_1, t - x_1) dt \right) dx_1 = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, t - x_1) dx_1 \right) dt$$

olar. Sıxlıq funksiyasının tərifinə görə

$$f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, t - x_1) dx_1$$

Eyni qayda

$$f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t - x_2, x_2) dx_2$$

olduğunu alırıq.

İndi isə iki asılı olmayan diskret təsadüfə kəmiyyətlərin cəminin ehtimallarının paylanma qanununu tapaq. Tutaq ki, X_1, X_2 asılı olmayan diskret təsadüfə kəmiyyətlərdir və $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$. $A_x = \{X_1 + X = x\}$ hadisəsini uyğun olmayan hadisələrinin cəmi şəklində göstərək:

$$A_x = \sum_{i=1}^{\infty} \{X_1 = x_i, X_2 = x - x_i\}$$

X_1, X_2 asılı olmayan diskret təsadüfə kəmiyyətlər olduğu üçün

$$P\{X_1 = x_i, X_2 = x - x_i\} = P(X_1 = x_i)P(X_2 = x - x_i)$$

Onda

$$P\{X_1 + X_2 = x\} = P(A_x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i)P(X_2 = x - x_i)$$

Tutaq ki, $X_1 \in N(a_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \in N(a_2, \sigma_2^2)$. Asılı olmayaraq təsadüfə kəmiyyətlərin cəminin sıxlıq funksiyası $f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, t - x_1) dx_1$ düsturu ilə hesablanır. Bu düsturları istifadə etməklə $X_1 + X_2 \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ olduğunu alırıq. Beləliklə, asılı olmayan iki normal təsadüfə kəmiyyətin cəmi də normal təsadüfə kəmiyyətdir.

Bölmə 7. TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTLƏRİN ƏDƏDİ XARAKTERİSTİKALARI

YERLƏŞMƏ XARAKTERİSTİKALARI: Riyazi gözləmə, moda, median.

Təsadüfə kəmiyyətlərin ehtimalının paylanma qanunu onun tam xarakteristikası olduğu məlumdur. Lakin bəzən ehtimalın paylanma qanunu məlum olmur, təsadüfə kəmiyyətin müəyyən ehtimal xassələrini nisbətən az və ya sadə məlumatlar vasitəsilə öyrənmək lazım gəlir. Təsadüfə kəmiyyətin belə sadə xassələri, onun ədədi xarakteristikaları adlanan bir neçə ədədlə ifadə olunur.

Təsadüfə kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları onu müəyyən dəqiqliklə kəmiyyətə xarakterizə edir. Bu ədədi xarakteristikalar təsadüfə kəmiyyət haqqındakı bəzi ehtimal məsələlərini çox zaman qısa yolla həll etməyə və həm də həmin kəmiyyət haqqında yığcam və ətraflı məlumat almağa imkan verir.

Təsadüfə kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlərin ədəd oxunda necə paylandığını xarakterizə etmək üçün müxtəlif ədədi xarakteristikalardan (riyazi gözləmə, orta xətti meyl, dispersiya, orta kvadratik meyl, momentlər və s.) istifadə olunur.

Tərif 1. Təsadüfə kəmiyyətin yerləşmə xarakteristikası elə sabitə deyilir ki, bu kəmiyyətin bütün mümkün qiymətləri həmin sabit ətrafında qruplaşmış olsun.

Riyazi gözləmə, moda və median ən çox istifadə olunan yerləşmə xarakteristikalarıdır.

Tutaq ki, diskret təsadüfə X kəmiyyətinin ala bildiyi $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymətləri və uyğun olaraq bu qiymətləri almasının $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ehtimalları verilmişdir.

Riyazi gözləmə, moda və median

Tərif 2. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ sırası mütləq yığılan olduqda, onun cəminə diskret təsadüfə X kəmiyyətinin riyazi gözləməsi deyilir və EX ilə işarə olunur:

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Sıra mütləq dağılan olduqda deyirlər ki, X təsadüfə kəmiyyətinin riyazi gözləməsi yoxdur.

Təsadüfə X kəmiyyəti ancaq sonlu sayda $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini ala bilirsə, onda onun həmişə sonlu riyazi gözləməsi vardır:

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Tərif 3. Ehtimalının paylanma sıxlığı $p(x)$ olan kəsilməz X təsadüfə kəmiyyətinin riyazi gözləməsi, mütləq yığılan

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

integralına deyilir. Bu integralı mütləq yığılan olmadıqda, deyirlər ki, təsadüfə kəmiyyətin riyazi gözləməsi yoxdur.

Paylanma funksiyası üçün $\frac{dF(x)}{dx} = p(x)$ olduğundan riyazi gözləmənin düsturunu

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

şəklində yazı bilərik.

Təriflərdən aydın olur ki, təsadüfə kəmiyyətlərin riyazi gözləməsi sabit ədəddir.

Tutaq ki, X kəmiyyəti aparılan n sınaq nəticəsində x_i qiymətini $n_i, i=1,2,\dots,k$ dəfə almışdır və $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Ehtimalın statistik tərifinə görə, kifayət qədər böyük n -lər üçün

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \approx \sum_{i=1}^n x_i \frac{n_i}{n}$$

təqribi bərabərliyini yazı bilərik. Deməli, diskret təsadüfə kəmiyyətin riyazi gözləməsi onun ala biləcəyi qiymətlərin hesabi ortasına bərabərdir.

Tutaq ki, X təsadüfə kəmiyyət $F(x)$ isə onun paylanma funksiyasıdır.

Tərif 4. $F(x) \leq 0.5 \leq F(x+0)$ münasibətini ödəyən istənilən x ədədi X kəmiyyətinin medianı adlanır.

Verilmiş təsadüfə kəmiyyətin riyazi gözləməsi olmaya bilər, lakin hər bir təsadüfə kəmiyyətin heç olmasa bir medianı var. Doğrudan da, paylanma funksiyası 0-dan 1-ə kimi monoton artan olduğundan, elə x nöqtəsi vardır ki, funksiya bu nöqtədə 0.5 qiymətindən keçir. $F(x)$ funksiyası bu nöqtədə kəsilməz olduqda x medianı yeganə olur. Həmin nöqtənin müəyyən ətrafında yerləşən bütün nöqtələrdə

$$F(x) = 0.5$$

bərabərliyi ödənildikdə isə bu ətrafın bütün nöqtələri median olur. Bu intervallar X kəmiyyətinin medianlar seqmenti adlanır.

Paylanma funksiyası kəsilməyən olduqda $F(x) \leq 0.5 \leq F(x+0)$ münasibəti

$$F(x) = 0.5$$

bərabərliyinə çevrilir. Bu halda, X təsadüfə kəmiyyətinin medianı, $F(x) = 0.5$ bərabərliyini ödəyən yeganə x kökü olur. $F(x) \leq 0.5 \leq F(x+0)$ münasibətini $P(X < x) = P(X > x)$ bərabərliyi şəklində yazmaq olar.

Doğrudan da, bu bərabərlik

$$P(X < x) + P(X > x) = 1$$

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{2}$$

olmasından

$$P(X \geq x) = \frac{1}{2}$$

alınır. $F(x)$ funksiyası kəsilməyən olduğuna görə $P(X = x)$ bərabərliyi ödənilir. Buna görə də axırıncı bərabərliyi

$$P(X > x) = \frac{1}{2}$$

kimi yazmaq olar. Buradan isə tələb olunan

$$P(X < x) = P(X > x) = \frac{1}{2}$$

münasibəti alınır.

$P(X < x) = P(X > x)$ bərabərliyindən görünür ki, həndəsi olaraq median, sıxlıq funksiyasının qrafiki ilə əhatə olunmuş sahəni yarıya bölən düz xətt nöqtələrinin absisidir.

Xüsusi halda, simmetrik paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətin medianı onun riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşür. Məsələn, normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin medianı onun riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşür.

Təsadüfi kəmiyyətin kvantili də medianə analoji olaraq təyin edilir.

Tərif 5. $F(x) = p(0 < p < 1) \Leftrightarrow P(X < t_p) = p$ tənliyinin kökünə p -tərtibli kvantil deyilir.

Xüsusi halda $p=0.5$ tərtibli kvantil paylanmanın medianıdır. p -nin bir neçə qiymətində kvantilləri bilməklə paylanma funksiyasının artma istiqamətini təyin etmək olar.

X təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının p tərtibli böhran nöqtəsi (p tərtibli simmetrik böhran nöqtəsi) $P(X \geq z_p) = p$ ($P(|X| \geq z_p)$) tənliyini ödəyən z_p həqiqi ədədinə deyilir.

Eyni bir paylanmanın kvantili və böhran nöqtəsi arasında $z_p = t_{1-p}$ münasibəti doğrudur.

Standart normal paylanmanın kvantilləri.

P	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
z_p	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Tutaq ki, X kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası $f(x)$ -dir.

Tərif 6. $f(x)$ funksiyasının hər bir x maksimum nöqtəsinə X kəmiyyətinin modası deyilir.

Təsadüfi kəmiyyət yeganə modaya malik olduqda ona bir modalı, bir neçə modaya malik olduqda isə çox modalı adlanır.

Əgər X diskret təsadüfi kəmiyyət olub $x_1 < x_2 < \dots$ mümkün qiymətlərini $p(x_1), p(x_2), \dots$ ehtimalları ilə alırsa, onda onun modası

$$p(x) \geq p(x_i), i \geq 1$$

münasibəti ilə təyin olunur.

Medianın xassələri.

1) Sabit vuruğu median işarəsi xaricinə çıxarmaq olar, yəni

$$m(cX) = cmX, c = \text{const}$$

2) Simmetrik təsadüfi kəmiyyətin medianı onun riyazi gözləməsinə bərabərdir.

$$EX = mX$$

3) $|mX - EX| \leq \sigma\sqrt{2} \leq 0.5$

bərabərsizliyi doğrudur.

Doğrudan da, Çebışev bərabərsizliyinə əsasən

$$P(|X - EX| \geq \sigma\sqrt{2}) \leq 0.5$$

münasibətini, buradan isə xassə 3-ün doğruluğu alınır.

4) $E|X - c|$ mütləq momenti $c = EX$ olduqda minimuma çevrilir, yəni

$$\min E|X - c| = E|X - EX|$$

Riyazi gözləmənin xassələri.

1. Sabitin riyazi gözləməsi özünə bərabərdir:

$$E(C) = C$$

2. Sabit vuruğu riyazi gözləmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$E(CX) = CEX$$

İsbatı. X təsadüfi kəmiyyəti x_k qiymətini p_k ehtimalı ilə alırsa $Y = CX$ təsadüfi kəmiyyəti Cx_k qiymətini həmin ehtimalla alır. Onda tərifə əsasən

$$ECX = \sum_k Cx_k p_k = C \sum_k x_k p_k = CEX$$

3. İki təsadüfi kəmiyyətin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələri cəminə bərabərdir:

$$E(X + Y) = EX + EY$$

İsbatı. Tutaq ki, $P(X = x_k) = p_k, P(Y = y_n) = q_n, k \geq 1$ Onda $X + Y$ təsadüfi kəmiyyəti $x_k + y_n (k, n = 1, 2, \dots)$ qiymətlərini $p_{k,n}$ ehtimalı ilə alır. Bu halda

$$p_k = P(X = x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = x_k, Y = y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{k,n}$$

və

$$q_n = P(Y = y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k, Y = y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,n}$$

bərabərlikləri doğru olar. Onda riyazi gözləmənin tərifinə görə

$$E(X + Y) = \sum_{k,n} (x_k + y_n) p_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (x_k + y_n) p_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_{k,n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k + \sum_{n=1}^{\infty} y_n q_n = EX + EY$$

Bu xassə istənilən sonlu sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi üçün də doğrudur.

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n$$

Nəticə 1. $Y = kX + B$ təsadüfi kəmiyyəti üçün

$$EY = kEX + B$$

bərabərliyi doğrudur.

Nəticə 2. İki təsadüfi kəmiyyətin fərqlərinin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələri fərqlinə bərabərdir:

Doğrudan da

$$E(X - Y) = E(X + (-1)Y) = EX + E((-1)Y) = EX + (-1)EY = EX - EY$$

4. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin hasilinin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələri hasilinə bərabərdir:

$$EXY = EXEY$$

İsbatı. XY təsadüfə kəmiyyəti $x_k y_n$ qiymətlərini uyğun olaraq

$$P[(X = x_k)(Y = y_n)] = P(X = x_k)P(Y = y_n) = p_k q_n$$

ehtimalları ilə alar. Riyazi gözləmənin tərifinə görə

$$EXY = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_k y_n p_k q_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{n=1}^{\infty} y_n p_k = EXEY$$

Bu xassə istənilən sonlu sayda asılı olmayan təsadüfə kəmiyyətlər üçün də doğrudur:

$$EX_1 X_2 \dots X_n = EX_1 EX_2 \dots EX_n$$

5. İstənilən X təsadüfə kəmiyyəti üçün

$$|EX| \leq E|X|$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Bu bərabərsizlik

$$\left| \sum_k x_k p_k \right| \leq \sum_k |x_k| p_k$$

bərabərsizliyindən alınır.

6) $X_1 \prec X_2 \Rightarrow EX_1 \leq EX_2$

7) $EX^2 = 0$ olarsa, onda vahid ehtimalla $X = 0$ olar.

SƏPƏLƏNMƏ XARAKTERİSTİKALARI

Təsadüfə kəmiyyətin riyazi gözləməsi, onun qiymətlərinin ədəd oxu üzərində yerləşmə xarakteristikalarından biridir. Qeyd etdiyimiz kimi, təsadüfə kəmiyyətin mümkün qiymətləri onun riyazi gözləməsi ətrafında qruplaşır. Lakin bu qiymətlərin riyazi gözləmə ətrafında necə paylanmasını və ya səpələnməsini çox zaman bilmək tələb olunur.

Tərif 7. Təsadüfə kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsinin ölçüsünü göstərən sabit ədədə bu kəmiyyətin səpələnmə xarakteristikası deyilir.

Bu xarakteristikalara orta xətti meyl, dispersiya, orta kvadratik meyl və variasiya əmsalı aiddir.

Orta xətti meyl, dispersiya, orta kvadratik meyl, variasiya əmsalı.

Tərif 8. Təsadüfə X kəmiyyətinin öz riyazi gözləməsindən meylinin kvadratının riyazi gözləməsinə bu kəmiyyətin dispersiyası deyilir və belə işarə olunur:

$$DX = E(X - EX)^2$$

Xüsusi halda X diskret təsadüfə kəmiyyət olduqda onun dispersiyası

$$DX = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - EX)^2 p_k$$

bərabərliyi ilə, kəsilməz olduqda isə

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 p(x) dx$$

bərabərliyi ilə təyin edilir.

Tərifdən aydındır ki, istənilən təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası mənfi olmayan ədəddir. Bunula yanaşı

$$DX = EX^2 - 2EXEX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

olduğundan dispersiyanı

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

düsturu ilə də hesablamaq olar.

$DX = EX^2 - (EX)^2$ bərabərliyindən və dispersiyanın mənfi olmamasına əsasən

$$EX^2 \geq (EX)^2$$

olduğunu yaza bilərik.

Təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası onun mümkün qiymətlərinin riyazi gözləməsi ətrafında səpələnməsinin sıxlığını göstərməsi aşağıdakı mühakimədən aydındır. X

təsadüfi kəmiyyətinin qiymətləri riyazi gözləməyə yaxın olduqda $DX = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - EX)^2 p_k$

cəminin hədləri çox kiçik ədədlər və buna görə də bu cəm də kiçik ədəd olur. Əksinə, təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri riyazi gözləmədən uzaqda yerləşdikdə cəmin hədləri

böyük ədədlər olur və buna görə də $DX = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - EX)^2 p_k$ cəmi böyük ədəd olur. Buradan

aydındır ki, dispersiyanı təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin riyazi gözləmə ətrafında səpələnməsinin ölçüsü hesab etmək olar.

DISPERSİYANIN XASSƏLƏRİ

1. Sabitin dispersiyası sıfıra bərabərdir:

$$DC = 0$$

Doğrudan da, $DC = E(C - EC)^2 = E0 = 0$

2. İstənilən c sabiti üçün $DcX = c^2 DX$

bərabərliyi doğrudur.

Doğrudan da,

$$DcX = E(cX - EcX)^2 = Ec^2 (X - EX)^2 = c^2 E(X - EX)^2 = c^2 DX$$

3. Cüt-cüt asılı olmayan $X_1, X_2, \dots, X_n$ kəmiyyətlərinin cəminin dispersiyası, onların dispersiyaları cəminə bərabərdir, yəni

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n$$

İsbatı. $\delta_i = X_i - EX_i$ qəbul edərək yaza bilərik:

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i - E \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 + \sum_{i \neq j} \delta_i \delta_j$$

Buradan

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E \sum_{i=1}^n \delta_i^2 + \sum_{i \neq j} E \delta_i E \delta_j = \sum_{i=1}^n DX_i$$

Nəticə 3. İki asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin cəminin dispersiyası onların dispersiyaları cəminə bərabərdir.

Nəticə 4. İki asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin fərqlinin dispersiyası onların dispersiyaları cəminə bərabərdir.

$$4. \text{MIN}(X - c)^2 = DX$$

$$5. a < X < b \Rightarrow DX \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Qeyd 1. $X^0 = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$ kəmiyyətinə normallaşmış kəmiyyət deyilir. Onda

$$DX^0 = \frac{1}{DX} D(X - EX) = \frac{1}{DX} DX = 1$$

olar.

Tərif 9. Dispersiyanın hesabi kvadrat kökünə orta kvadratik meyl deyilir.

$$\sigma = +\sqrt{DX}$$

Tərif 10. $V = \frac{\sigma}{EX} 100\%$ ədədinə təsadüfi kəmiyyətin variasiya əmsalı deyilir.

Tərifə görə, variasiya əmsalı orta kvadratik meylin riyazi gözləməyə faiz nisbətidir. Başqa sözlə o, σ -nın EX -in neçə faizi olduğunu göstərir.

Variasiya əmsalı, müxtəlif ölçü vahidləri ilə ifadə edilən bir neçə kəmiyyətin dəyişmə dərəcələrini müqayisə etməyə imkan verir.

Qeyd 1. Standart normal paylanma funksiyasını $F_0(x)$ ilə işarə etsək,

$$F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

olar.

Qeyd 2. $Z = \frac{X-a}{\sigma}$ normallaşdırılmış təsadüfi kəmiyyətinin $(0, x)$ intervalına düşməsi ehtimalı

$$P(0 < Z < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x)$$

Burada, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ laplas funksiyasıdır.

TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTİN MOMENTLƏRİ.

Təsadüfi kəmiyyətin ala bildiyi qiymətləri və bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığını göstərən paylanma funksiyası onun ən mükəmməl xarakteritikasıdır. Paylanma funksiyası isə bəzən bir və ya bir neçə parametrdən asılı olur. Məsələn, normal paylanma iki parametrdən asılıdır. Paylanma funksiyasının parametrləri, bir qayda olaraq, təsadüfi kəmiyyətin mühüm ədədi xarakteristikaları olan müxtəlif tərtibli momentlər vasitəsilə ifadə olunur. Təsadüfi kəmiyyətin momentlərini hesablamaqla onun paylanma funksiyasını təyin etmək mümkün olur.

$$\text{Tərif 11.} \quad E(X - c)^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^n dF(x)$$

ədədinə X təsadüfi kəmiyyətinin c ədədinə görə n -tərtibli momenti deyilir.

Diskret və kəsilməz təsadüfə kəmiyyətlər üçün bu düsturu uyğun olaraq

$$E(x-c)^n = \sum_i (x_i - c)^n p_i$$

və

$$E(x-c)^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^n f(x) dx$$

bərabərliklərinə çevrilir. Xüsusi halda $c=0, c=EX$ olarsa

$$b_n = EX^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x)$$

$$m_n = E(X - EX)^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^n dF(x)$$

alırıq.

Tərif 12. b_n kəmiyyəti X kəmiyyətinin n tərtibli başlanğıc momenti, m_n isə onun momenti adlanır.

Təsadüfə kəmiyyətin başlanğıc və mərkəzi momentləri arasında əlaqə vardır:

$$b_n = \sum_{i=0}^n b_i^{n-i} m_i$$

$$m_n = \sum_{i=0}^n C_n^i (-b_1)^{n-i} b_i$$

Doğrudan da, istənilən α, β ədədləri üçün yazı bilərik:

$$E(X - \alpha)^n = E[(X - \beta) + (\beta - \alpha)]^n = \sum_{i=0}^n C_n^i E(X - \beta)^i (\beta - \alpha)^{n-i}$$

Bu düstur α ədədinə görə n tərtibli momenti, β ədədinə görə n -dən kiçik tərtibli momentlərlə ifadə etməyə imkan verir. Axıncı düsturda əvvəlcə $\alpha = EX, \beta = 0$ sonra isə $\alpha = 0, EX = 0$ qəbul etsək, (20) və (21)-i alırıq.

Bu düsturlardan xüsusi hallarda aşağıdakı düsturlar alınır:

$$m_2 = b_2 - b_1^2$$

$$m_3 = 2b_1^2 - 3b_1 b_2$$

$$m_4 = -3b_1^4 + 6b_1^2 b_2 - 4b_1 b_3 + b_4$$

$$a_2 = a_1^2 + b_2$$

$$a_3 = a$$

$$a_4 = a_1^4 + 6b_1^2 b_2 + 4a_1 b_3 + b_4$$

Praktikada 3 və 4 tərtibli momentlərdən istifadə edilir

Nəzəri paylanmanın normal paylanmadan kənarlaşmasının qiymətləndirilməsi. Asimetriya və eksess əmsalları.

Normal paylanmalardan fərqli paylanmaların tədqiqində bu fərqi qiymətləndirilməsi məsələsi meydana çıxır. Bu məqsədlə asimetriya və eksess əmsallarından istifadə olunur. Normal paylanmalar üçün bu əmsallar sıfıra bərabərdir. Ona

görə də tədqiq edilən paylanma üçün bu əmsallar kiçik olduqda onlun normal paylanmaya yaxın olduğunu fərz etmək olar. Əksinə asimmetriya və eksses əmsallarının kifayət qədər böyük olması normal paylanmadan əhəmiyyətli kənarlaşmanın olduğunu söyləməyə əsas verir.

Qeyd edək ki, 3 tərtibli mərkəzi moment təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməyə nisbətən paylanmasının simmetrikliyini xarakterizə edir. Bu paylanmalar üçün asimmetriya və eksses əmsalları sıfıra bərabərdir. Qeyri simmetrik paylanmalar üçün tək tərtibli mərkəzi momentlər (bir tərtibli moment istisna olmaqla) sıfırdan fərqlidirlər. Deməli, bu momentlərdən istəniləni asimmetriyanın qiymətləndirilməsi olaraq götürülə bilər. Lakin onun kəmiyyətinin ölçü vahidi təsadüfi kəmiyyətin ölçü vahidi ilə eynidir. Ona görə də qeyri simmetrikliyin xarakteristikası olaraq $a = \frac{m_3}{\sigma^3}$ ölçüsüz kəmiyyət təyin edilir.

Tərif 13. $a = \frac{m_3}{\sigma^3}$ kəmiyyətinə X təsadüfi kəmiyyətinin asimmetriya əmsalı deyilir.

Asimmetriya müsbət olduqda paylanma əyrisinin “uzun hissəsi” riyazi gözləmədən sağ tərəfdə, mənfi olduqda isə sol tərəfdə yerləşir.

Təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası verildikdə onun 4-cü tərtib mərkəzi momenti bu kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən böyük yayılmasını xarakterizə edir. Bu isə simmetrik paylanmanın EX nöqtəsində maksimum qiymət almasının, yəni paylanma əyrisinin bu nöqtədə “şiş” uclu və ya “yastı” olmasının xarakteristikasıdır. Bu vəziyyəti təyin edəcək ölçüsüz kəmiyyət olaraq

$$e = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$$

təyin olunur.

Tərif 14. $e = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$ kəmiyyətinə X təsadüfi kəmiyyətinin ekssesi deyilir.

Təbiətdə və ya təcrübədə öyrənilən bir çox təsadüfi proseslərin paylanması normal paylanmaya çox yaxın olur. İstənilən təsadüfi kəmiyyətin paylanma əyrisini normal paylanma əyrisi ilə müqayisə edirlər. Ona görə də asimmetriya və eksses anlayışlarının köməyiylə hər hansı təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının normal paylanmadan meylini xarakterizə edirlər. Bununla əlaqədar ekssesin ifadəsinə də 3 toplananı əlavə edilmişdir. Normal paylanma üçün asimmetriya və eksses sıfıra bərabərdir.

Kovariasiya və korrelyasiya əmsalı

Tərif 15. $m_{1,1}$ momentinə, yəni

$$\text{cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = EXY - EXEY$$

ifadəsinə təsadüfi vektorun kovariasiyası deyilir.

Xüsusi halda $\text{cov}(X, X) = DX$

Tərif 12. $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D_X D_Y}}$ normallaşdırılmış kovariasiyasına (X, Y) təsadüfi

vektorunun X və Y komponentlərinin korrelyasiya əmsalı deyilir.

Aydındır ki,

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

bərabərliyi ödənilir.

Asılı olmayan kəmiyyətlər üçün $\text{cov}(X, Y) = 0$. Buradan isə aydındır ki, $\text{cov}(X, Y) \neq 0$ şərtini ödəyən kəmiyyətlər asılıdır. Onların asılılığını bu kəmiyyətlə xarakterizə etmək əlverişli deyildir, çünki bu kəmiyyət təsadüfi X və Y kəmiyyətlərinin ölçü vahidlərindən asılıdır. Buna görə də təsadüfi kəmiyyətlərin asılılığını kəmiyyətə xarakterizə etmək üçün həmin kəmiyyətlərin normallaşmış meyllərinin kovariasiyası olan

$$\rho(X, Y) = E \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}}$$

və ya

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$$

kəmiyyəti götürülür. Bu kəmiyyət adsız kəmiyyətdir.

Tərif 13. $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D_X D_Y}}$ normallaşdırılmış kovariasiyasına (X, Y) təsadüfi

vektorunun X və Y komponentlərinin korrelyasiya əmsalı deyilir.

X və Y kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün onların korrelyasiya əmsalının sıfıra bərabər olması zəruridir, lakin korrelyasiya əmsalının sıfıra bərabər olmasından X və Y kəmiyyətlərinin asılı olmaması çıxmır.

Korrelyasiya əmsalı sıfıra bərabər olan kəmiyyətlərə korrelyasiyalanmamış, korrelyasiya əmsalı sıfıra bərabər olmayan kəmiyyətlərə isə korrelyasiyalanmış kəmiyyətlər deyilir.

Yuxarıda dediklərimiz göstərir ki, asılı olmayan kəmiyyətlər korrelyasiyalanmamış kəmiyyətlərdir. Lakin korrelyasiyalanmamış kəmiyyətlərin asılı olmadığını hökm etmək olmaz. Deməli, təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmaması, onların korrelyasiyalanmamış olmasına nəzərən güclü şərtidir.

Normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər üçün isə asılı olmamaq və korrelyasiyalanmamaq anlayışları ekvivalentdir: normal paylanmış X və Y kəmiyyətlərinin asılı olmaması üçün onların korrelyasiya əmsalının sıfıra bərabər olması zəruri və kafidir.

Korrelyasiya əmsalının xassələri :

1. korrelyasiya əmsalının mütləq qiyməti vahiddən böyük deyildir, yəni istənilən X və Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$|\rho(X, Y)| \leq 1$$

bərabərliyi ödənilir.

Doğrudan da,

$$0 \leq E \left[\left(\frac{X - EX}{\sigma_X} \pm \frac{Y - EY}{\sigma_Y} \right)^2 \right] = 2 \pm 2 \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 2(1 \pm \rho(X, Y))$$

münasibətinə əsasən

$$1 - \rho(X, Y) \geq 0, 1 + \rho(X, Y) \geq 0$$

bərabərsizlikləri ödənilməlidir. Buradan

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

və ya tələb olunan

$$|\rho(X, Y)| \leq 1$$

bərabərsizliyi alınır. Axırıncı bərabərsizliyi

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{DXDY}$$

kimi də yazmaq olar.

2. Təsadüfi kəmiyyətlərin xətti çevirməsi, onların korrelyasiya əmsalının mütləq qiymətini dəyişmir, yəni istənilən sabit a, b, c, d ədədləri üçün

$$|\rho(aX + b, cY + d)| = |\rho(X, Y)|$$

bərabərliyi doğrudur.

Doğrudan da, tərifə görə

$$\rho(aX + b, cY + d) = \frac{E[(aX + b)(cY + d)] - E(aX + b)E(cY + d)}{\sqrt{D(aX + b)D(cY + d)}} = \frac{ac(EXY - EXEY)}{\sqrt{a^2 DX c^2 DY}} = \frac{ac}{|ac|} \rho(X, Y)$$

olduğundan xassənin doğruluğu alınır.

Təsadüfi vektorun ədədi xarakteristikaları.

Tərif 14. $EX = (E_X, E_Y)$ ədədi vektoruna ikiölçülü (X, Y) təsadüfi vektorunun riyazi gözləməsi deyilir.

Burada kəsilməz təsadüfi vektorlar üçün

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, y) dx dy, \quad E_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy$$

diskret təsadüfi vektorlar üçün isə

$$E_X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{ij}, \quad E_Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j p_{ij}$$

X kəsilməz komponentinin dispersiyası $D_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E_X)^2 f_X(x, y) dx dy$ düsturu ilə

hesablanır. Diskret halda bu düstur $D_X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - E_X)^2 p_{ij}$ şəklinə düşür.

Y komponentinin dispersiyası müvafiq olaraq

$$D_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - E_Y)^2 f_X(x, y) dx dy \quad \text{və} \quad D_Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_j - E_Y)^2 p_{ij}$$

düsturları ilə hesablanır.

$$\text{Tərif 15.} \quad b_{k,s} = EX^k Y^s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f_X(x, y) dx dy$$

ifadəsinə kəsilməz təsadüfi vektorların $k+s$ tərtibli başlanğıc momenti deyilir.

Diskret təsadüfi vektorlar üçün

$$b_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^k y_j^s p_{ij}$$

$$\text{Tərif 16.} \quad m_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^k (y - EY)^s f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

ifadəsinə kəsilməz təsadüfi vektorların k+s tərtibli mərkəzi momenti deyilir.

Diskret təsadüfi vektorlar üçün

$$m_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - EX)^k (y - EY)^s p_{ij}$$

Təsadüfi vektorun kovariasiya və korrelyasiya matrisləri.

$$K_X = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinə $X = (X_1, \dots, X_n)$ n-ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin covariasiya matrisi deyilir. Burada, $k_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ X_i və X_j kəmiyyətlərinin kovariasiya əmsalıdır.

Kovariasiya matrisi simmetrik həqiqi matrisdir, yəni $k_{ij} = k_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$R_X = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

normallaşdırılmış kovariasiya matrisinə isə matrisinə $X = (X_1, \dots, X_n)$ n-ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin korrelyasiya matrisi deyilir.

Burada, $\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{DX_i} \sqrt{DX_j}}$; $i, j = 1, 2, \dots, n$ X_i və X_j kəmiyyətlərinin korrelyasiya

əmsalıdır.

1) K_X və R_X matrisləri simmetrik matrislərdir, yəni; $\rho_{ij} = \rho_{ji}$; $k_{ij} = k_{ji}$

2) K_X və R_X matrisləri mənfi olmayan müəyyəndirlər, yəni bu matrislərin baş minorları mənfi deyildir:

Qeyd edək ki, bu münasibətlərdə bərabərlik işarəsi o vaxt ola bilər ki, təsadüfi vektorun X_i koordinatları arasında xətti funksional asılılıq olsun.

3) Xəssə 2)-də $n=2$ olduqda

$$|\beta_{12}| \leq \sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}, k_{12} \leq \sqrt{k_{11}k_{22}}, |r_{12}| \leq 1$$

4) xəssə 3)-də $X_1 = X, X_2 = Y$ götürsək, onda üçüncü xəssəni belə yazı bilərik:

$$|EXY|^2 \leq E|X|^2 E|Y|^2$$

5) İstənilən X və Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$EXY = EXEY + k_{XY}$$

bərabərliyi doğrudur.

Təsadüfi vektorun kovariasiya və korrelyasiya matrisləri.

$$K_X = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinə $X = (X_1, \dots, X_n)$ n-ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin kovariasiya matrisi deyilir. Burada, $k_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j); i, j = 1, 2, \dots, n$ X_i və X_j kəmiyyətlərinin kovariasiya əmsalıdır.

Kovariasiya matrisi simmetrik həqiqi matrisdir.

$$R_X = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinə $X = (X_1, \dots, X_n)$ n-ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin korrelyasiya matrisi deyilir. Burada, $\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{DX_i} \sqrt{DX_j}}; i, j = 1, 2, \dots, n$ X_i və X_j kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalıdır.

1) K_X və R_X matrisləri simmetrik matrislərdir, yəni; $\rho_{ij} = \rho_{ji}; k_{ij} = k_{ji}$

2) K_X və R_X matrisləri mənfi olmayan müəyyəndirlər, yəni bu matrislərin baş minorları mənfi deyildir:

Qeyd edək ki, bu münasibətlərdə bərabərlik işarəsi o vaxt ola bilər ki, təsadüfi vektorun X_i koordinatları arasında xətti funksional asılılıq olsun.

3) Xəssə 2)-də $n=2$ olduqda

$$|\beta_{12}| \leq \sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}, k_{12} \leq \sqrt{k_{11}k_{22}}, |r_{12}| \leq 1$$

4) xəssə 3)-də $X_1 = X, X_2 = Y$ götürsək, onda üçüncü xəssəni belə yazı bilərik:

$$|EXY|^2 \leq E|X|^2 E|Y|^2$$

5) İstənilən X və Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$EXY = EXEY + k_{XY}$$

bərabərliyi doğrudur.

Kovariasiya matrisi və $EX = (EX_1, EX_2, \dots, EX_n)$ ortalar vektoru təsadüfi vektorun əsas xarakteristikalarıdır.

Teorem. İstənilən $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ normal vektorunun riyazi gözləməsi və kovariasiya matrisi vardır və onun riyazi gözləməsi at' dispersiyası isə tBt' -ə bərabərdir.

İsbatı. Tərifə görə hər bir X_i komponenti normal kəmiyyətdir və buna görə də

$$a_i = EX_i < \infty, \sigma_i^2 = DX_i < \infty$$

Buradan koşi-Bünyakovski bərabərsizliyinə əsasən yazı bilərik:

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = \sigma_i \sigma_j < \infty$$

Xt' kəmiyyətinin riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapaq:

$$e(Xt') = (EX)t' = at'$$

$$D(Xt') = D\left(\sum_{i=1}^n t_i X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^n t_i (X_i - EX_i)\right)^2 = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} t_i t_j = tBt'$$

Normal vektorun sıxlıq funksiyası.

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ vektorunun sıxlıq funksiyası

$$n(x; a, B) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |B|}} e^{-\frac{1}{2}(x-a)B^{-1}(x-a)'} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |B|}} \exp\left[-\frac{1}{2|B|} \sum_{i,j} B_{ij} (x_i - a_i)(x_j - a_j)\right]$$

şəklində olduqda ona normal təsadüf vektor deyilir. Burada,

$$|B| = \det B, B_{ij} \text{ isə } \sigma_{ij} = E(X_i - a_i)(X_j - a_j)$$

elementinin cəbri tamalayıcısıdır

Beləliklə, çoxölçülü normal paylanma riyazi gözləmələr vektoru və kovariasiya matrisi ilə, yəni baş yığımın $\left[n + \frac{n(n+1)}{2}\right]$ sayda parametrləri ilə təyin edilir.

Bölmə 8. BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU VƏ MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMLƏRİ.

Təsadüf kəmiyyətlər ardıcılığının yığılması..

a) Ehtimala görə yığılma. $\bar{X}_n, n \geq 1$ təsadüf kəmiyyətlər ardıcılığı

$$P(|X_n - \bar{X}| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

şərtini ödədikdə, deyirlər ki, bu ardıcılıq X kəmiyyətinə ehtimala görə yığılır və bu yığılmanı $X_n \xrightarrow{P} X$ kimi işarə edirlər. Burada, ε ixtiyari müsbət ədəddir.

Ehtimala görə yığılmanın mühüm xassələri ilə tanış olaq.

1) Tutaq ki, $X_n \xrightarrow{P} X, n \rightarrow \infty$ olduqda $f(x)$ isə kəsilməyən funksiyadır. Onda

$$f(X_n) \xrightarrow{P} f(X), n \rightarrow \infty$$

2) Tutaq ki, m sayda $X_n^{(k)}, k=1,2,\dots,m$ təsadüf kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir,

$X_n^{(k)} \xrightarrow{P} X^{(k)}, n \rightarrow \infty$ $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ isə kəsilməyən funksiyadır. Onda

$$\Phi(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(m)}) \xrightarrow{P} \Phi(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(m)}), n \rightarrow \infty$$

3) $X_n \xrightarrow{P} X$ və $P(|X_n| \leq c) = 1$ olduqda $EX_n \rightarrow EX, n \rightarrow \infty$

b) vahid ehtimalla yığılma. Tutaq ki, $\bar{X}_n, n \geq 1$ təsadüf kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir. " $X_n \xrightarrow{P} X$ - ə yığılır" hadisəsinə baxaq və bu hadisəni A ilə işarə edək.

$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ |X_n - X| < \frac{1}{r} \right\}$. Məlumdur ki, X_n və X - təsadüf kəmiyyətlər olduqda A

təsadüf hadisədir. $A_{N,k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ |X_n - X| < \frac{1}{r} \right\}$ hadisəsi $n \geq N$ üçün $|X_n - X| < \frac{1}{r}$

bərabərsizliyinin ödənilməsi; $B_k = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_{N,k}$ - elə N vardır ki, $n \geq N$ üçün $|X_n - X| < \frac{1}{r}$ bərabərsizliyi ödənilir; $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ - hadisəsi isə hər bir r üçün elə N vardır ki, $n \geq N$ olduqda $|X_n - X| < \frac{1}{r}$ bərabərsizliyinin ödənilməsi hadisəsidir.

$\bar{X}_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı

$$P(X_n \rightarrow X) = P\left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left(|X_n - X| < \frac{1}{r}\right)\right) = 1$$

bərabərliyini ödədikdə, bu ardıcılıq X kəmiyyətinə vahid ehtimal ilə və yaxud sanki yəqin yığılır deyirlər və bunu $P(X_n \rightarrow X) = 1$ $X_n \rightarrow^{s,y} X$ kimi işarə edirlər.

$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 1$ olduqda istənilən k üçün $P(B_k) = 1$, əksinə istənilən k üçün $P(B_k) = 1$ olmasından

$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 1$ olduğu alınır. Beləliklə, $P(X_n \rightarrow X) = 1$ münasibətinin ödənilməsi üçün

$P\left\{\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} |X_n - X| < \frac{1}{r}\right\} = 1$ şərtinin ödənilməsi zəruri və kifidir. $\bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{|X_n - X| < \frac{1}{r}\right\}$ monoton artan

hadisələr ardıcılığı olduğu üçün $P\left\{\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} |X_n - X| < \frac{1}{r}\right\} = 1$ şərtinin ödənilməsi istənilən r

üçün $P\left\{\bigcap_{n=N}^{\infty} |X_n - X| < \frac{1}{r}\right\} \rightarrow 1$ şərtinin ödənilməsi zəruri və kifidir. Qeyd edək ki, burada $\frac{1}{r}$

nisbətini ixtiyari ε ilə əvəz etmək olar.

Teorem 1. $\bar{X}_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının X kəmiyyətinə vahid ehtimalla yığılması üçün

$$P\left\{\bigcap_{n=N}^{\infty} (|X_n - X| < \varepsilon)\right\} \rightarrow 1$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kifidir.

Nəticə 1. $\bar{X}_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının X kəmiyyətinə vahid ehtimalla yığılmasından ehtimalla görə yığılma alınır.

Doğrudan da, $P\{|X_n - X| < \varepsilon\} \geq P\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} (|X_k - X| < \varepsilon)\right\}$ olduğu üçün $P\{|X_n - X| < \varepsilon\} \rightarrow 1$ şərtindən $X_n \xrightarrow{P} X$ alınır.

Nəticə 2. $\bar{X}_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının X kəmiyyətinə vahid ehtimalla yığılması üçün ixtiyari müsbət ε üçün

$$P\left\{\bigcup_{n=N}^{\infty} (|X_n - X| > \varepsilon)\right\} \rightarrow 0$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kifidir.

$$P\left\{\bigcup_{n=N}^{\infty} (|X_n - X| > \varepsilon)\right\} \leq \sum_{n=N}^{\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\}$$

olduğu üçün ixtiyari $\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} < \infty$ münasibətinin ödənilməsindən

$$P(X_n \rightarrow X) = 1$$

alınır.

c) orta kvadratik yığılma.

İkitərtibli, $\bar{X}_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün $E|X_n - X|^2 \rightarrow 0$ şərti ödənildikdə bu ardıcılıq X kəmiyyətinə orta kvadratik yığılır deyirlər və bunu $X_n \xrightarrow{0.k.} X$ kimi işarə edirlər.

$X_n, n \geq 1$ ardıcılığının X kəmiyyətinə orta kvadratik mənada yığılması üçün $EX_n \rightarrow a, DX_n \rightarrow 0$ şərtlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

1) $X_n \xrightarrow{0.k.} X$ olduqda $X_n \xrightarrow{P} X$ olar.

2) $X_n \xrightarrow{0.k.} X$ olduqda $EX_n \rightarrow EX, EX_n^2 \rightarrow EX^2$

3) $\bar{X}_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının hər hansı c sabitinə orta kvadratik yığılması üçün $EX_n \rightarrow EX, DX_n \rightarrow DX$ şərtlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

Vahid ehtimalla və orta kvadratik yığılmalardan ehtimala görə yığılma alınır.

Böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremlərinin mahiyyəti.

Ehtimal nəzəriyyəsi və onun tətbiqi sahələrində çoxlu sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi şəklində göstərilən təsadüfi kəmiyyətlərə tez-tez təsadüf edilir. Belə təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin paylanma qanununun bilavasitə tapılması müəyyən çətinliklərlə bağlıdır. Məlumdur ki, riyazi gözləmələri a , dispersiyaları σ^2 olan asılı olmayan eyni paylanmaya malik $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin hesabi ortası böyük n -lər üçün dayanıqlıdır və riyazi gözləmədən az fərqlənir, dispersiyası isə $n \rightarrow \infty$ şərtində sıfıra yaxınlaşır. Deməli, n -in böyük qiymətlərində n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi ortasının müəyyən mənada a -ya bərabər olduğunu qəbul etmək olar. Beləliklə, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hesabi ortasının böyük n -lər üçün dayanıqlıq xassəsinin riyazi ifadəsi böyük ədədlər qanunu vasitəsi ilə verilir.

Böyük ədədlər qanuna aid olan teoremlər təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi ortasının hansı şərtlər daxilində dayanıqlı olması şərtlərini müəyyən edir. Mərkəzi limit teoremlərində isə n sayda təsadüfi kəmiyyətlərin normallaşdırılmış cəminin $n \rightarrow \infty$ şərtində normal paylanmaya malik olması şərtləri ifadə edilir.

Bu mövzuda biz böyük ədədlər qanununun və mərkəzi limit teoremlərinin bəzi teoremləri ilə tanış olacağıq. Bu teoremlərin ehtimal şərhli müşahidələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda onların hesabi ortalar ardıcılığının xassəsinin öyrənilməsindən ibarətdir. Hesabi ortalar bir sıra maraqlı xassələrə malikdirlər. Hesabi ortanı formalaşdıran hər bir müşahidənin nəticəsi hər hansı bir təsadüfi kəmiyyətin realizasiyası olduğu üçün onun kəmiyyəti haldan (təsadüfdən) asılı olacaqdır. Ancaq müşahidələrin sayı çox olduqda müxtəlif təsadüfi amillərin təsiri qarşılıqlı silinir, nəticədə müşahidənin nəticələrinin hesabi ortası realizasiyası müşahidə edilən təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsindən cüzi fərqlənir.

Böyük ədədlər qanunu təcrübədə mühüm əhəmiyyətə malikdir. Bu qanun statistik tədqiqatların – uçot və hesabat məlumatlarının toplanmasının, kütləvi hadisələrin

qanunu uyğunluqlarının aşkar edilməsinin əsasını təşkil edir. Böyük ədədlər qanununa görə müşahidələrin sayının qeyri-məhdud artması ilə müxtəlif təsadüfi meyillər qarşılıqlı silinir və nəticədə müşahidələrin nəticələrinin hesabi ortası, tədqiq edilən əlamətin statistik yığımdakı orta kəmiyyətindən vahidə kifayət qədər yaxın ehtimalla cüzi sürətdə fərqlənənir.

Kəmiyyətlərin əsil qiymətini təyin edərkən bu və ya başqa dərəcədə xəyata yol verilir. Məsələn, tərəzi çəkinin, termometr temperaturun, ampermetr cərəyan şiddətinin əsil qiymətini dəqiq deyil, təqribi qiymətini göstərir. Hər hansı a kəmiyyətini təyin edərkən, onun $X_1, X_2, \dots, X_n$ təcrübi qiymətləri vasitəsi ilə təyin edilən

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

kəmiyyətindən geniş istifadə olunur. Məhz bu kəmiyyət n -nin kifayət qədər böyük qiymətlərində a -nın əsil qiymətini aşağıda dəqiqləşdiriləcək mənada çox yaxın olur.

Ölçmə prosesində təsadüfi amillər olduğuna görə, onun $X_1, X_2, \dots, X_n$ nəticələrinə təbii olaraq təsadüfi kəmiyyət kimi baxılmalıdır. Ölçmə nəzəriyyəsində aşağıdakı fərziyyə əsas götürülür: aparılan ölçmələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda alınan nəticələrin ədədi ortası müəyyən bir a sabitinə olduqca yaxın olur. Belə xassəyə malik olan a sabitini ölçülən kəmiyyətin əsil qiyməti kimi götürmək təbiidir.

Yuxarıda şərh edilən təcrübi fərziyyə, riyazi cəhətdən ehtimal nəzəriyyəsinin böyük bir bölməsini təşkil edən böyük ədədlər qanunu vasitəsi ilə əsaslandırılır. Ehtimal nəzəriyyəsində böyük ədədlər qanunu dedikdə, təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının bu və ya digər mənada müəyyən sabitə yığılması haqqında teoremlər nəzərdə tutulur. Böyük ədədlər qanununun ilk formasını 1713-cü ildə Y. Bernulli kəşf etmişdir. Hadisənin baş vermə tezliyinin onun ehtimalına yığılması haqqında Bernulli teoreminin tarixən fundamental əhəmiyyəti onunla izah olunur ki, bu teorem ehtimalın statistik tərifini riyazi əsaslandırır. Həmin teorem bir çox alimlərin diqqətini cəlb etmiş və müxtəlif istiqamətlərdə gücləndirilmişdir.

Böyük ədədlər qanunu klassik formada belə ifadə olunur.

$\bar{X}_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \rightarrow 0$$

şərtini ödəyərsə, həmin ardıcılıq üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir deyilir.

Bu qanunu ilk dəfə rus riyaziyyatçısı A. Markov ifadə etmişdir.

Burada yığılma ehtimal mənada başa düşülür. Beləliklə, böyük ədədlər qanunu n sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin öz riyazi gözləməsinə ehtimal mənada yaxınlaşması şərtlərini müəyyən edir.

Böyük ədədlər qanununun statistika təcrübəsində əhəmiyyəti. Praktiki yaxınlıq prinsipi.

Bəşəriyyət tərəfindən uzun əsrlər zamanı əldə edilmiş təcrübəyə görə müəyyən şərtlər daxilində hadisənin baş vermə ehtimalı kifayət qədər kiçik olduqda, bu şərtlərin bir dəfə icrasında hadisənin baş verməməsinə əmin olmaq olar. İnsan fəaliyyətinin bütün

sahələrində bu hadisəni mümkün olmayan hadisə kimi qəbul edirlər. Təcrübədə mümkün olmayan hadisələrin ehtimallarının yuxarı sərhəddini göstərmək mümkün deyildir. Ona görə də hər bir konkret halda praktiki olaraq mümkün olmayan hadisənin baş verməsinin əhəmiyyətliliyindən asılı olaraq yuxarı sərhəddi müəyyən etmək lazımdır. Hadisənin ehtimalı kifayət qədər kiçik olduqda o, praktiki olaraq mümkün olmayan hadisə hesab edilir. Bu halda hadisənin tamamlayanının ehtimalı vahidə yaxın olur. Beləliklə, sınaq nəticəsində hadisənin tamamlayanı praktiki olaraq yəqin hadisə hesab edilir. Deməli, biz hadisələrin mümkün olmaması və onların ehtimalının kiçik olması; əksinə onların əksi olan hadisələrin praktiki yəqin olması və yaxud onların ehtimallarının vahidə yaxın olması haqqında danışa bilərik.

Tutaq ki, hər hansı naməlum parametr qiymətləndirilir. Parametrin qiymətləndirməsi böyük ədədlər qanununa tabe olduqda müşahidələrin sayını qeyri-məhdud olaraq artırmaqla vahidə kifayət qədər yaxın ehtimalla xətanın kifayət qədər kiçik olmasını təmin etmək olar. Böyük ədədlər qanunu ayrı-ayrı qiymətləndirmələrin xətalarının kifayət qədər kiçik ədədi aşmamasına təminat vermir. Ancaq bu qanuna görə müşahidələrin sayı qeyri-məhdud artdıqda belə hal daha az ehtimallı olur. Məsələn, metal pulu 1000000 dəfə atdıqda hər dəfə qərb üzü düşə bilər. Bu halda qərb üzünün düşməsi hadisənin tezliyi 1 olar və rəqəm üzünün düşməsi ehtimalı olan $-\frac{1}{2}$ dən əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənər. Ancaq bu nəticənin ehtimalı olan $\left(\frac{1}{2}\right)^{1000000}$ ədədi o qədər kiçikdir ki, onu praktiki olaraq nəzərə

almamaq olar. Eyni ilə hər hansı iqtisadi rayonda buğdanın məhsuldarlığı qiymətləndirildikdə təsadüfən məhsuldarlıqları kiçik (böyük) olan təsərrüfatlar seçilə bilər və nəticədə məhsuldarlığın qiymətləndirməsi real orta məhsuldarlıqdan kifayət qədər fərqli olar. Ancaq böyük ədədlər qanununa görə müşahidələrin sayı qeyri-məhdud olaraq artdıqca belə bir nəticənin alınması ehtimalı kiçilir.

Böyük ədədlər qanununun statistika təcrübəsində tətbiqinin əsasını praktiki yəqinlik prinsipi təşkil edir. Bu prinsip empirik müşahidəyə əsaslanır: ehtimalları kifayət qədər kiçik olan hadisələr çox nadir hallarda, ehtimalları vahidə yaxın olan hadisələr isə sanki yəqin baş verir. Bu vəziyyət təcrübənin aşkar nəticəsi kimi qəbul edilir. Təsadüfə hadisənin ehtimalı kifayət qədər kiçik olduqda o nadir hallarda baş verir və təcrübədə bu hadisənin baş verməməsini qəbul etmək olar. Bu halda deyirlər ki, hadisənin baş verməməsinə əminlik vardır.

Praktiki əminliyə misal olaraq ot tayasında iynənin tapılmasını məsələsini göstərmək olar. Tayadan təsadüfə qaydada çıxarılmış bir çəngə otda axtarılan iynə ola bilər. Ancaq bu hadisənin ehtimalı o qədər kiçikdir ki, praktiki olaraq bu hadisənin baş verməsi qeyri-mümkün hesab edilir. Beləliklə, təsadüfə olaraq çıxarılmış bir çəngə otda iynənin olmaması praktiki yəqin hadisədir.

Biz bilirik ki, hər gün nəqliyyat ilə işə gedərkən qəza baş verə bilər və biz həlak ola bilərik. Ancaq praktiki olaraq biz belə bir ehtimalla razılaşırıq, yəni qəzanın baş verməsi ehtimalı kifayət qədər kiçik olduğu üçün biz qəza nəticəsində həlak olmayacağımıza praktiki olaraq əminik. Eyni ilə seçmə yığıma əsasən iqtisadi rayonda buğdanın məhsuldarlığını qiymətləndirdikdə müşahidələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda biz xətanın əhəmiyyətli olmamasına praktiki olaraq əminik.

Praktiki yəqinlik prinsipinə görə çoxsaylı müşahidələr üçün böyük ədədlər qanuna tabe olan xətlərin ehtimalı çox kiçikdir. Təcrübə də bu faktın doğruluğunu təsdiq edir. Bununla belə, hadisənin baş verməməsinə praktiki yəqinlik olduğu haldada o, baş verə bilər. Məsələn, yuxarıda qeyd edildiyi kimi təsadüfi qydata çıxarılmış bir çəngə otda iynənin tapılması mümkündür. Buğdanın məhsuldarlığını müəyyən etdikdə təsadüfi qaydada məhsuldarlıqları böyük və yaxud kiçik olan təsərrüfatlar seçilə bilər. Bu halda hətta müşahidələrin sayı çox olduqda belə məhsuldarlığın qiymətləndirməsinin xətası əhəmiyyətli ola bilər. Beləliklə, böyük ədədlər qanununun təcrübədə tətbiqinin əsası olan praktiki yəqinlik prinsipi çox nadir, ancaq mümkün olan istisnalara yol verir. Baş verməməsinə praktiki yəqinlik olan hadisələr baş verə bilər. Ona görə də mümkün istisnaların tezliklərinin daha dəqiq analizi məsələsi meydana çıxır. Bu məsələ gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu vasitəsi ilə həll edilir. Kolmoqorov göstərmişdir ki, asılı olmayan müşahidələr bircins yığımda aparıldıqda, yəni müşahidənin nəticələri sonlu riyazi gözləməsi olan hər hansı bir təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri olduqda və müşahidələrin sayı qeyri-məhdud artdıqda onların nəticələrinin hesabi ortası riyazi gözləməyə vahid ehtimal ilə yığılır:

$$P(\bar{X}_n \rightarrow EX) = 1$$

Bu halda müşahidələrin sayı kifayət qədər böyük olduqda $|\bar{X}_n - EX| < \varepsilon$ bərabərsizliyinin ödənilməsinə vahid ehtimalla gözləmək olar. Bu isə o deməkdir ki, riyazi gözləmənin qiymətləndirməsində xəta kifayət qədər kiçik müsbət ε -dan böyük deyildir.

Çebışev bərabərsizliyi.

Təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası məlum olduqda onun öz riyazi gözləməsindən kənarlaşmasını dispersiya vasitəsilə qiymətləndirmək olar. Bununla belə kənarlaşmanın ehtimalının qiymətləndirməsi ancaq dispersiyadan asılıdır. Müvafiq qiymətləndirmə Çebışev bərabərsizliyi vasitəsilə həll edilir.

Teorem 2 (Çebışev bərabərsizliyi). Sonlu dispersiyası olan X təsadüfi kəmiyyəti ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$P(|X - EX| > \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

bərabərsizliyini ödəyir.

Doğrudan da, tutaq ki, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir və onun sıxlıq funksiyası $f(x)$ dir. Onda

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = \int_{|x - EX| \geq \varepsilon} f(x) dx$$

münasibətinə əsasən

$$DX = E[(X - EX)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx \geq \int_{|x - EX| \geq \varepsilon} |x - EX|^2 f(x) dx > \varepsilon^2 \int_{|x - EX| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^2 P(|X - EX| > \varepsilon) \text{ və}$$

ya

$$DX \geq \varepsilon^2 P(|X - EX| > \varepsilon)$$

Buradan isə Çebişev bərabərsizliyi alınır. Diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün isbat anolajı üsulla aparılır.

Çebişev bərabərsizliyinin iki nəticəsi ilə tanış olaq. Bu nəticələr böyük ədədlər qanununun və təsadüfi kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən meylinin mütləq qiymətinin müəyyən ədədi aşmaması hadisəsinin qiymətləndirilməsində istifadə edilir.

Nəticə 1. İstənilən $\varepsilon > 0$ üçün

$$P(|X - EX| > \varepsilon) + P(|X - EX| < \varepsilon) = 1$$

bərabərliyində birinci toplanana Çebişev bərabərsizliyini tətbiq etsək

$$P(|X - EX| < \varepsilon) > 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

olduğunu alırıq.

Nəticə 2. $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduqda

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \zeta_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\zeta_i < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \frac{D\zeta_1 + \dots + D\zeta_n}{n}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Bərabərsizliyi isbat etmək məqsədi ilə $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ təsadüfi kəmiyyətinə baxaq. Riyazi gözləmə və dispersiyanın məlum xassələrinə əsasən

$$EY = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \quad DY = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i$$

Çebişev bərabərsizliyini Y təsadüfi kəmiyyətinə tətbiq edək.

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i < \varepsilon\right\} &= P\{|Y - EY| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DY}{\varepsilon^2} = \\ &= 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \frac{DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n}{n} \end{aligned}$$

Bu bərabərsizlik təsadüfi kəmiyyətlərin hesabi ortasının öz riyazi gözləməsindən meylinin mütləq qiymətinin ehtimalının aşağıdan qiymətləndirməsini verir. Bu qiymətləndirmə vahiddən dispersiyaların $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n DX_i$ hesabi ortasının $\frac{1}{n\varepsilon^2}$ ədədinə hasili qədər kiçikdir. Dispersiyaların hesabi ortası məhdud olduqda qeyd edilmiş $\varepsilon > 0$ üçün bu qiymətləndirmə $n \rightarrow \infty$ şərtində vahidə yaxınlaşır.

Böyük ədədlər qanunu haqqında klassik teoremlər.

Əvvəlcə asılı olmayan n sınaqa A təsadüfi hadisəsinin $\frac{s_n}{n}$ baş verməsi tezlikləri ardıcılığı və asılı olmayan yəsadüfi kəmiyyətlərinin

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

hesabi ortası üçün böyük ədədlər qanununun ödənildiyini göstərək.

Teorem 3(Bernulli teorem). Tutaq ki, n sayda Bernulli sınağında müsbət nəticənin baş vermə sayı s_n , hər bir sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə p ($0 < p < 1$)-dir.Onda $\forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\lim P\left(\left|\frac{s_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$$

münasibəti doğrudur.

İsbatı. X_i ilə i -ci sınaqda müsbət nəticənin baş vermə sayını işarə edək. Onda $s_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olduğunu yaza bilərik.Aydındır ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ kəmiyyətləri asılı deyillər və

$$P(X_i = 1) = p, P(X_i = 0) = 1 - p = q; i = 1, 2, \dots, n$$

Buradan

$$EX_i = 1 \times p + 0 \times q = p; EX_i^2 = 1^2 \times p + 0^2 \times q = p;$$

$$DX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq, i \geq 1$$

$$E \frac{s_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = p; D \frac{s_n}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{pq}{n};$$

Çebişev bərabərsizliyindən istifadə etməklə yaza bilərik:

$$P\left[\left|\frac{s_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D \frac{s_n}{n} = \frac{pq}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

Bernulli teoremi göstərir ki, aparılan sınaqların sayı qeyri- məhdud artdıqda hadisənin başvermə tezliyi ehtimala görə haisənin ehtimalına yığılır.

Bernulli teoremində sınaqların eyni şərtlər kompleksi daxilində aparıldığı fərz olunur.Lakin sınaqları eyni şərtlər daxilində aparmaq həmişə mümkün olmur.Məsələn, naməlum bir kəmiyyəti tapmaq üçün aparılan ölçməni tamamilə eyni şərtlər daxilində təkrar etmək praktiki olaraq çox çətindir.Buna görə də müxtəlif şəraitdə aparılan sınaqlar zamanı hadisənin başvermə tezliyinin özünü necə aparmasını bilmək çox mühüm məsələdir.

Müxtəlif şərtlər daxilində aparılan sınaqlar seriyasında hadisənin başvermə tezliyinin dayanıqlıq xassəsini Puasson öyrənmişdir.

Teorem 4.(Puasson teoremi).Tutaq ki, n sayda Bernulli sınağında müsbət nəticənin baş vermə sayı s_n , i -ci sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə p_i -dir.Bu halda ehtimal mənada

$$\frac{s_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n} \rightarrow 0$$

münasibəti doğrudur.

İsbatı. i -ci sınaqda müsbət nəticənin baş vermə sayını X_i ilə işarə edək.Onda şərtə görə $X_1, X_2, \dots, X_n$ -lər asılı olmayan kəmiyyətlərdir və

$$EX_i = p_i, DX_i = p_i q_i \leq 0.25$$

Deməli Çebişev teoreminin şərtləri ödənilir və buna görə də

$$\frac{s_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} = \bar{X}_n - E\bar{X}_n \rightarrow 0$$

Teorem5(Çebişev teoremi).Tutaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı cüt-cüt asılı olmayandırlar və $DX_i \leq C, C = \text{cons}, i \geq 1$. Onda $X_n, n \geq 1$ ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir.

İsbatı: Teoremin şərtinə görə

$$DX_i \leq C, C = \text{cons}, i \geq 1 \quad \text{və} \quad \frac{DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n}{n} \leq C$$

Cebişev bərabərsizliyinin nəticəsindən istifadə edərək

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \frac{\sum_{i=1}^n DX_i}{n} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

olduğunu alırıq. Ehtimal vahiddən böyük olmadığı üçün

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \leq P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right| < \varepsilon\right\} \leq 1$$

Axırıncı bərabərsizlikdə $n \rightarrow \infty$ olduqda limitə keçsək teoremin doğruluğunu alırıq.

Bu teoremdə bilavasitə asılı olmayan eyni paylanmaya malik və sonlu dispersiyaya olan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanununu ödəndiyi alınır.

Teorem 6. Tutaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ eyni paylanmaya malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və $DX_i = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n$. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a\right| < \varepsilon\right\} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \frac{1}{n} na = a \quad \text{və} \quad DX_i = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n \quad \text{olduğu üçün Cebişev bərabərsizliyinə}$$

əsasən yazı bilirik:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^n DX_i}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

Axırıncı bərabərsizlik $X_n, n \geq 1$ ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanununun ödəndiyini göstərir.

Qeyd 1. Məlumdur ki, orta kvadratik yığılmadan ehtimala görə yığılma alınır. $X_n, n \geq 1$ ardıcılığının a ədədinə orta kvadratik mənada yığılması üçün $EX_n \rightarrow a, DX_n \rightarrow 0$ şərtlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir. $X_n, n \geq 1$ kəmiyyətləri asılı olmadıqları üçün

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i \leq \frac{1}{n^2} Cn = \frac{C}{n} \rightarrow 0. \text{ Deməli, teoremin doğruluğu üçün } \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i \rightarrow 0$$

şərtinin ödənilməsi kafi şərtədir. Bu şərt isə $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n DX_i \rightarrow 0$ olduqda ödənilir. Doğrudan da,

Ştols teoreminə görə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{DX_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{DX_n}{2n-1} = 0$$

$$\text{Qeyd 2. } P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - a\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - a\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n DX_i}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{C}{\varepsilon^2 n}$$

Çebişev teoreminin mahiyyəti və təcrübədə əhəmiyyəti.

Bu teorem göstərir ki, ayrı-ayrı təsadüfi kəmiyyətlər öz riyazi gözləmələrindən kifayət qədər fəqli qiymətlər ala bilərlər. Ancaq çox sayda təsadüfi kəmiyyətlərin hesabi ortası böyük ehtimalla riyazi gözləməyə yaxın olacaqdır. Başqa sözlə, ayrı-ayrı təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətlərinin variasiyası kifayət qədər böyük ola bilər, ancaq onların hesabi ortasının səpələnməsi kiçik olacaqdır.

Beləliklə, hər bir təsadüfi kəmiyyətin hansı mümkün qiymətləri ala biləcəyini qətiyyətlə söyləmək mümkün olmasa da, onların hesabi ortasının hansı qiymət alacağını əvvəlcədən görmək olar. Deməli, dispersiyaları müntəzəm məhdud olan çox sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hesabi ortası öz təsadüfiliyini itirir. Bu onunla izah edilir ki, hər bir kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən kənarlaşması müsbət və mənfi ola bilər. Hesabi ortada isə bu kənarlaşmalar bir-birini silir.

Çebişev teoremi təsadüf və zərurət arasındakı əlaqənin parlaq nümunəsidir. Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, adətən, hər hansı fiziki kəmiyyətin əsl qiymətini təyin etmək üçün bir neçə ölçmələr aparılır və təcrübi nəticələrin hesabi ortası fiziki kəmiyyətin əsl qiyməti kimi qəbul edilir. Bu ölçmə üsulünün hansı şərtlər daxilində doğru olduğuna Çebişev teoremi cavab verir. Doğrudan da, ölçmələrin nəticələrinə $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri kimi baxmaq olar. Bu kəmiyyətlər eyni riyazi gözləməyə malik asılı olmayan və dispersiyaları müntəzəm məhdud olduqda onlara Çebişev teoremini tətbiq etmək olar:

Ölçmələrin nəticələri asılı olmadıqda birinci tələb ödənilir. İkinci tələb ölçmələr sistematik (birişərəli) xəyata malik olmadıqda ödənilir. Bu halda, bütün təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləməsi ölçülən kəmiyyətin əsl qiymətinə bərabərdir. Üçüncü tələb isə cihaz ölçmələrin müəyyən dəqiqliyini təmin etdikdə ödənilir. Ayrı-ayrı ölçmələrin nəticələrinin müxtəlif olmasına baxmayaraq, onların səpələnməsi məhduddur.

Yuxarıda göstərilən bütün tələblər ödənildikdə, təcrübənin nəticələrinə Çebişev teoremini tətbiq etmək olar:

Kifayət qədər böyük n -lər üçün

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi vahidə yaxın ehtimalla ödəniləcəkdir. Başqa sözlə, ölçmələrin sayı qeyri-məhdud artdıqda onların hesabi ortasının ölçülən kəmiyyətin əsl qiymətinə kifayət qədər yaxın olmasını yəqinliklə söyləmək olar.

Beləliklə, Çebişev teoremi ölçmənin göstərilən üsulunun hansı şərtlər daxilində tətbiq edilə biləcəyini göstərir. Ancaq, ölçmələrin sayını artırmaqla kifayət qədər böyük dəqiqlik əldə etmək olmaz. Belə ki, cihazın özü ölçülən kəmiyyətin əsl qiymətini müəyyən dəqiqliklə göstərir. Ona görə də hər bir ölçmənin nəticəsi və beləliklə, onların hesabi ortasının dəqiqliyi cihazın dəqiqliyini aşsa bilməz.

Böyük ədədlər qanunu müxtəlif sığorta növlərinin –insan həyatının, əmlakın, heyvan və əkin sahələrinin sığortasının əsasını təşkil edir. Əmtəə istehlakının çeşidinin

planlaşdırılmasında onlara əhalinin tələbatı nəzərə alınır. Bu tələbatda isə böyük ədədlər qanunu özünü göstərir. Statistikada geniş surətdə tətbiq edilən seçmə metodu da Çebışev teoreminə əsaslanır.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün böyük ədədlər qanunu A.A. Markov tərəfindən isbat edilmişdir.

Teorem 7 (A.A. Markov teoremi) Əgər $X_n, n \geq 1$ ardıcılığı

$$D\bar{X}_n \rightarrow 0$$

şərtini ödəyirsə onda həmin ardıcılıq üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir.

İsbatı. Doğrudanda Çebışev bərabərsizliyinə görə

$$P\left(\left|\bar{X}_n - E\bar{X}_n\right| < \varepsilon\right) \leq \frac{D\bar{X}_n}{\varepsilon^2}$$

$D\bar{X}_n \rightarrow 0$ olduğu üçün buradan $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \rightarrow 0$ alınır.

Klassik teoremlərin ümumiləşdirilməsi.

Müşahidələrin sayı qeyri-məhdud artdıqda qiymətləndirmənin orta xətasının sıfıra yaxınlaşması böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün kafi şərtidir. Bu şərt isə müşahidələr asılı olmadıqda və onların dispersiyaları sonlu olduqda həmişə ödənilir. Beləliklə, müşahidələrin asılı olmaması və onların dispersiyalarının sonlu olması böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün kafi şərtidir. Keyfiyyət əlamətlərinin asılı olmayan müşahidələri aparıldıqda $p_i q_i \leq \frac{1}{4}, i = 1, 2, \dots$ olduğu üçün dispersiyaların sonlu olması həmişə ödənilir. Kəmiyyət əlamətlərinin müşahidəsində isə bəzi müşahidələrin dispersiyası sonsuz ola bilər. Bu məsələ, təsadüfi kəmiyyətin qiymətlər oblası sonsuz interval olduqda baş verə bilər. Bu halda böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün digər kafi şərtlər tapılmalıdır.

Markov göstərmişdir ki, böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün müşahidələrin asılı olmaması və müəyyən bir $\varepsilon > 0$ üçün $E|X_1|^{1+\varepsilon}, E|X_2|^{1+\varepsilon}, \dots, E|X_n|^{1+\varepsilon}$ momentlərinin sonlu olması kifayətdir. Bu isə dispersiyaların sonlu olması şərtinin ümumiləşməsidir.

Xinçin göstərmişdir ki, müşahidələr asılı olmadıqda və yığım bircins olduqda, yəni müşahidələr eyni bir təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri olduqda hesabi orta üçün böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün riyazi gözləmənin sonlu olması kifayətdir.

Böyük ədədlər qanunu sonlu dispersiyalı olmayan, lakin eyni paylanmaya malik asılı olmayan və sonlu riyazi gözləməyə malik təsadüfi kəmiyyətlər üçün də doğrudur. Bu teoremi ilk dəfə rus riyaziyyatçısı A.Y. Xinçin isbat etmişdir.

Teorem 8 (A.Y. Xinçin teoremi). Tutaq ki, $X_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmayan eyni paylanma funksiyasına və sonlu riyazi gözləməyə malik kəmiyyətlərdir. Onda bu ardıcılıq üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir, yəni $\forall \varepsilon > 0$ üçün

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a\right| < \varepsilon\right\} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

Qeyd 3.Xinçin teoremi təsdiq edir ki, küllü miqdarda təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi ortası vahidə yaxın ehtimal ilə onların riyazi gözləməsinə çox yaxın olur.Başqa sözlə, hər bir kəmiyyət təsadüfi olduğu halda , onların ədədi ortası demək olar ki, sabit qalır.Bu onunla izah edilir ki, hər bir kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən meyli həm müsbət, həm də mənfi ola bilər, lakin onların ədədi ortasında bu meyillər bib-birini qarşılıqlı yox edir.Xinçin teoreminin praktiki əhəmiyyətini aşağıdakı misalla izah edək.

Sistematik(birışarəli) xəta buraxmadan və ölçmə şərtlərini sabit saxlamaqla , müəyyən a kəmiyyətinin n sayda $X_1, X_2, \dots, X_n$ qiymətləri alınmışdır.Ölçmənin xətalari asılı deyil və ölçmə şərtlərinin sabitliyinə əsasən eyni paylanma funksiyasına malikdir.Bu halda A.Y.Xinçin teoreminə əsasən $\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ ədədi ortası n-nin kifayət qədər böyük qiymətlərində a kəmiyyətinə olduqca yaxın olacaqdır.Buna görə də a kəmiyyətinin təqribi qiyməti olaraq $\bar{x}_n$ ədədi ortasını qəbul etmək olar: $\bar{x}_n \approx a$

Mərkəzi limit teoremləri.

Böyük ədədlər qanunu müəyyən şərtlər daxilində

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

ədədi ortasının ehtimala görə $a = EX_i$ riyazi gözləməsinə yığıldığını təsdiq edir.Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikada bu ədədi ortanın paylanma funksiyasının təyini nəzəri və tətbiqi əhəmiyyət kəsb edən mühüm məsələdir.Praktikada ədədi ortanın paylanma funksiyasını təqribi olaraq normal paylanma funksiyası qəbul edirlər.Bu cür yaxınlaşmanın qanuni olması ehtimal nəzəriyyəsinin mərkəzi limit teoremləri vasitəsi ilə əsaslandırılır.

Qeyd edək ki, hətta eyni bir paylanma funksiyasına malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi ortasının limit paylanması normal paylanma olmayada bilər.

Təbii olaraq belə bir sual ortaya çıxır: $X_n, n \geq 1$ kəmiyyətləri hansı şərtləri ödədikdə

$$P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right) \rightarrow N(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (1)$$

münasibəti doğru olar?, burada cox vaxt $A_n = EX_n, B_n = \sqrt{DX_n}$ qəbul edilir.Ehtimal nəzəriyyəsində bu sual tamamilə öyrənilib və onun cavabı mərkəzi limit teoremi vasitəsilə verilir.

$X_n, n \geq 1$ ardıcılığı üçün (1) münasibəti ödənildikdə deyirlər ki, bu ardıcılıq üçün mərkəzi limit teoremi ödənilir.Beləliklə, mərkəzi limit teoremləri dedikdə, müəyyən təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının normal təsadüfi kəmiyyətə yığılmasını hökm edən teoremlər nəzərdə tutulur.

Tutaqki, η_n təsadüfi kəmiyyəti üçün elə $A_n, B_n > 0$ sabitləri var ki,

$$P\left(\frac{\eta_n - A_n}{B_n} < x\right) \rightarrow N(x, 0, 1) \Leftrightarrow P(\eta_n < x) - N(x, A_n, B_n) \rightarrow 0$$

münasibəti ödənilir.Bu halda deyirlər ki, η_n kəmiyyəti (A_n, B_n) parametrli asimptotik normal paylanmaya malikdir və ya (A_n, B_n) parametrli normal kəmiyyətdir. Bu düstur η_n

kəmiyyətinin paylanma funksiyasını n -in kifayət qədər böyük qiymətləri üçün (A_n, B_n) parametrlı normal paylanma funksiyası ilə yaxınlaşdırmağa imkan verir.

Teorem 9 (Çebışev). Tutaq ki, $X_n, n \geq 1$ asılı olmayan və eyni paylanma funksiyasına malik kəmiyyətlərdir və DX_i^2 . Bu halda

$$P\left(\frac{s_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

münasibəti doğrudur.

Muavr-Laplasın integral teoremi.

Tutaq ki, n sayda Bernulli sınağında müsbət nəticənin başvermə sayı s_n , hər sınaqda müsbət nəticənin başvermə ehtimalı isə p -dir. bu halda,

$$P\left(\frac{s_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2)$$

İsbatı. $s_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ götürək. Burada, $X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və $P(X_i = 1) = p, P(X_i = 0) = 1 - p = q; i = 1, 2, \dots, n$

Bu halda $a = EX_i$ olacaqdır. Çebışev teoremini $X_n, n \geq 1$ ardıcılılığına tətbiq etsək, (2) münasibətinin doğruluğunu alırıq.

Teorem 11 (Lyapunov). Tutaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ sonlu üçtərtibli mərkəzi momentləri olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda

$$\frac{\sqrt[3]{m_1^3 + m_2^3 + \dots + m_n^3}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

olduqda istənilən $-\infty < x < \infty$ üçün

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Burada, $a_i = EX_i, \sigma_i^2 = DX_i, m_i^3 = E|X_i - a_i|^3, i = 1, 2, \dots$

$$\frac{\sqrt[3]{m_1^3 + m_2^3 + \dots + m_n^3}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

şərtinə Lyapunov şərti deyilir.

Nəticə 1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan eyni paylanmaya malik və sonlu üçtərtibli mərkəzi momentləri olan təsadüfi kəmiyyətlər olduqda istənilən $-\infty < x < \infty$ üçün

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, n \rightarrow \infty$$

Doğrudan da baxılan halda Lyapunov şərtləri ödənilir:

$$a = EX_i, \sigma^2 = DX_i, m = E|X_i - a|^2;$$

$$\frac{\sqrt[3]{m_1^3 + m_2^3 + \dots + m_n^3}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}} = \frac{\sqrt[3]{nm^3}}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{m}{\sigma} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} \rightarrow 0$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan eyni paylanmaya malik təsadüfə kəmiyyətlər olduqda

Lyapunov teoreminin şərtləri daha zəif şərtlə əvəz edilə bilər. Bu halda üçtərtibli momentlərin varlığı şərtini dispersiyaların sonlu olması şərtləri ilə əvəz etmək olar.

Teorem 12. Tutaq ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ asılı olmayan eyni paylanmaya malik və sonlu $\sigma^2 = DX_i, i=1, 2, \dots$ dispersiyaları olan təsadüfə kəmiyyətlərdir. Onda istənilən $-\infty < x < \infty$ üçün

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, n \rightarrow \infty$$

münasibəti doğrudur.

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, n \rightarrow \infty$$

düsturu n -in böyük qiymətlərində asılı olmayan eyni paylanmaya malik təsadüfə kəmiyyətlərin cəmi ilə bağlı olan müxtəlif hadisələrin ehtimalını normal yaxınlaşma vasitəsilə hesablamağa imkan verir:

$$P\left(b \leq \sum_{i=1}^n X_i \leq t\right) = P\left(\frac{b - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{t - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{t - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{b - na}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Burada, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ standart normal təsadüfə kəmiyyətin paylanma funksiyasıdır.

Normal yaxınlaşmadan istifadənin n -in hansı qiymətlərində tövsiyə edilməsi məsələsi ehtimalın hesablanması üçün tələb edilən dəqiqliyindən asılıdır. Adətən təcrübədə $n > 10$ olduqda normal yaxınlaşmadan istifadə edilir.

Təsadüfə kəmiyyətlərin cəminin paylanma funksiyasının normal paylanmaya yığılması şərtləri təcrübədə adətən ödənilir. Normal paylanmaya təcrübədə tez-tez rast gəlinməsi bununla izah edilir. Məsələn, tutaq ki, hər hansı kəmiyyət ölçülür. Ölçmə prosesində

paylanma funksiyası məlum olmayan küllü miqdarda nəzərə çarpmayan kiçik təsadüfə xətlərin məcmuunu şəklində meydana çıxan xətləyə yol verilir. Ölçmə zamanı buraxılan sistematik xətləni aradan qaldırmaq olar, lakin müxtəlif səbəblər üzündən - ölçmə cihazından, mühitin temperaturu və təzyiqindən, təcrübəçinin psixi və fiziki vəziyyətinin dəyişməsi nəticəsində yol verilən xətləni isə aradan qaldırmaq mümkün deyildir. Bu xətlərin hər birinin ümumi xətləyə təsiri çox kiçikdir və həmin xətlərin məcmuunu ümumi xətləni əmələ gətirir. Mərkəzi limit teoreminə əsasən, küllü miqdarda asılı olmayan $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfə kəmiyyətlərinin $s_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ cəmində hər bir toplananın ümumi cəmə göstərdiyi təsir cüzi olarsa, onda bu cəmi təqribi olaraq normal kəmiyyət qəbul etmək olar. Bunu aparılan müşahidələr də təsdiq edir. Bəzi iqtisadi göstəricilər də küllü miqdarda təsadüfə toplananların cəmindən ibarətdir və hər bir toplananın ümumi cəmə göstərdiyi təsir cüzidir. Bu halda tədqiq edilən göstəricinin normal paylanmaya malik olduğu qəbul edilir.

Teorem 13 (Borel). Tutaq ki, aparılan n sayda Bernulli sınağında “+” nəticənin başvermə sayı s_n , h X_k ər bir sınaqda “+” nəticənin başvermə ehtimalı isə p -dir. X_k Onda

$$P\left(\frac{s_n}{n} \rightarrow p\right) = 1$$

X_k ilə k -cı sınaqda sınaqda “+” nəticənin başvermə sayını işarə edək.

$$\frac{s_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

$EX_k = p, DX_k = pq$ olduğu üçün teoremin isbatı vahid ehtimalla yığılma kriteriyasından alınır.

BÖLMƏ9. SEÇMƏNİN ƏDƏDİ XARAKTERİSTİKA

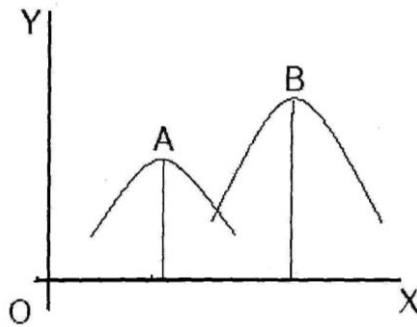
Statistik paylanmaların tədqiqinin əsas məsələləri

Bildiyimiz kimi, kimi təcrübə verilənlərin işlənilməsində birinci mərhələ paylanmanın variasiya sırasının qurulmasından ibarətdir. Variasiya sırasının cədvəl və yaxud qrafik şəklində təsviri paylanmanın daha ümumi və səciyyəvi xüsusiyyətləri haqqında ilkin təəvvür yaratmağa imkan verir. Bu isə paylanmanın müşahidə nəticəsində formalaşan “gizli” qanunauyğunluqlarının aşkar edilməsində atılmış ilkin addımdır. Bununla yanaşı yığımların statistik təhlilində əlamətin müşahidə edilən qiymətlərinin sadəcə olaraq nizamlanması ilə kifayətlənmək olmaz. Paylanma sıraları və onların müvafiq təsvirləri bütün ilkin məlumatları özündə əks etdirdiklərinə görə kifayət qədər mürəkkəb olurlar. Ona görə də paylanmanın statistik təsvirinin daha rəşional üsulu onun mühüm xüsusiyyətlərini özündə əks etdirən ədədi xarakteristikalarının hesablanmasıdır. Bu xarakteristikalar obyektiv bir göstərici kimi yığının rəşal xüsusiyyətlərini özündə əks etdirməli və verilmiş paylanma haqqında bütün mümkün məlumatların nəzərə alınmasına əsaslanmalıdır.

Statistik paylanmanın əsas xüsusiyyətlərinin ədədi xarakteristikalar vasitəsilə ifadə edilməsi, baxılan yığma xas olan qanunauyğunluqların daha dərindən və hərtərəfli

öyrənilməsinə təminat yaradır.

Məntiqi cəhətdən hər şeydən əvvəl bu xarakteristikaların hansı xüsusiyyətləri əks etdirməsinin zəruriliyi ilə tanış olaq. Bunun üçün şəkil 1-də göstərilən A və B paylanmalarına baxaq:



Şəkil 1. Müxtəlif ortalara və dispersiyalara malik paylanmalar.

Bu paylanmaların ədədi xarakteristikalar vasitəsilə ifadə edilə bilən mühüm xüsusiyyətləri ilə tanış olaq:

1. Şəkildən göründüyü kimi hər iki paylanmada yığımın elementləri əlamətin müəyyən mərkəzi qiyməti ətrafında yerləşmişlər. Bu cür hal bütün statistik paylanmalara xasdır. Ona görə də statistik paylanmaların tədqiqində qarşıya çıxan birinci məsələ onların mərkəzi qiymətinin, yəni orta səviyyəsinin müəyyən edilməsindən ibarətdir. Bu məqsədlə paylanmanın yerləşmə xarakteristikaları (mərkəzi meyl xarakteristikaları) hesablanılır.

2. Paylanmalar mərkəzi qiymətlərlə yanaşı əlamətin qiymətlərinin onun ətrafında səpələnməsinə görə də fərqlənilirlər.

Beləliklə, paylanma sıralarının tədqiqində ikinci məsələ əlamətin səpələnmə xarakteristikalarının axtarılmasından ibarətdir.

3. Müxtəlif formalı paylanma əyrilərinin tədqiqi göstərir ki, onlar simmetriklik cəhətdən fərqlənilirlər. Bununla əlaqədar olaraq üçüncü mühüm məsələ paylanmaların asimmetriya dərəcəsini müəyyən etməkdən ibarətdir.

4. Müxtəlif paylanma əyrilərinin normal əyri ilə müqayisəsi göstərir ki, bəzi paylanma əyriləri normal əyriyə nisbətən absis oxu boyunca "sıxılmış", digərləri isə "dartılmış" olurlar. Ona görə də paylanma əyrilərinin normal əyriyə nisbətən yerləşmə vəziyyətinin öyrənilməsi də mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Təsadüfi seçimin ədədi xarakteristikaları.

Ümumi şəkildə paylanma sıralarının statistik təsviri yerləşmə və səpələnmə xarakteristikalarının hesablanmasından, paylanmanın asimmetriya dərəcəsini müəyyən etməkdən ibarətdir.

Yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq paylanma sıralarının statistik xarakteristikaları ilə tanış olaq.

Tutaq ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ paylanma funksiyası $F(x)$ olan baş yığımdan həcmi n olan təsadüfi seçimdir.

Tərif . Təsadüfi seçimi təşkil edən $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini uyğun olaraq $\frac{1}{n}$ ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarına seçmənin ədədi

xarakteristikaları deyilir.

Ədədi xarakteristikaları üç qrupa – yerləşmə, səpələnmə və empirik paylanmanın normal paylanmaya nəzərən vəziyyətini müəyyən edən ədədi xarakteristikalara bölürlər.

Yerləşmə xarakteristikaları

Seçmə orta. Üstlü orta və onun xassələri.

Tərif 2. Seçimin yerləşmə xarakteristikası elə sabitə deyilir ki, seçmənin bütün elementləri bu sabit ətrafında qruplaşmış olsun.

Riyazi gözləmə, moda və median ən çox istifadə edilən yerləşmə xarakteristikalarıdır.

Tərif 1.-dən istifadə edərək seçmənin bu xarakteristikalarının hesablanması üçün uyğun düsturları verək.

Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini uyğun olaraq $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = \overline{1, n}$ ehtimalları ilə alan X diskret təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i P\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

düsturu ilə hesablanır.

Burada, nəzərə alsaq ki, ixtiyari $i = \overline{1, n}$ üçün $p_i = P\{X = x_i\} = \frac{1}{n}$,

onda $MX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ olduğunu alırıq.

Axırıncı düsturun sağ tərəfindəki ifadə seçmə orta adlanır və $\bar{x}$ ilə işarə edilir.

Beləliklə, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Tutaq ki, təsadüfi seçimin $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementləri içərisində k ($k < n$) sayda müxtəlif olan $z_1, z_2, \dots, z_k$ elementləri vardır. Onda $p_i = P\{X = z_i\} = \frac{n_i}{n}$, $i = \overline{1, k}$ və

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i n_i$ olduğunu alırıq.

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ düsturuna seçmə ortanın sadə, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i n_i$ düsturuna isə çəkili düsturu

deyilir.

Təcrübədə seçimin bütün elementləri müxtəlif və yaxud eyni tezliklərə malik olduqda sadə, əks halda isə çəkili düsturdan istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Qruplaşdırılmış seçmələr üçün riyazi gözləməni çəkili düstur ilə hesablamaq olar. Belə ki, burada z_i i -ci qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsi, n_i isə seçmənin intervalda yerləşən elementlərinin sayı, yəni intervalın tezliyidir.

Teorem 1. Seçimin elementlərinin seçmə ortadan kənarlaşmaları cəmi sıfıra bərabərdir. Yəni, $\sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x}) n_i = 0$

İsbatı. Doğrudan da

$$\sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x}) n_i = \sum_{i=1}^k z_i \cdot n_i - \bar{x} \sum_{i=1}^k n_i$$

$\sum_{i=1}^k n_i = n$ olduğunu nəzərə alsaq, $\sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x}) n_i = 0$ olduğunu alırıq.

Ehtimal nəzəriyyəsiindən məlumdur ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini uyğun olaraq $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = \overline{1, n}$ ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətin həndəsi və harmonik ortaları uyğun olaraq

$$G(X) = e^{\sum_{i=1}^n p_i \ln x_i}; \quad H(x) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} p_i \right)^{-1}$$

düsturları ilə hesablanır. İxtiyari $i = \overline{1, n}$ üçün $p_i = \frac{1}{n}$ olduğunu nəzərə alsaq

$$G(X) = e^{\sum_{i=1}^n p_i \ln x_i} = e^{\sum_{i=1}^n \ln x_i p_i} = \prod_{i=1}^n e^{\ln x_i p_i} = \prod_{i=1}^n x_i^{p_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

və

$$H(X) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} p_i \right)^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

olduğunu alırıq. Deməli, təsadüfi seçimin həndəsi ortası

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$$

harmonik ortası isə

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}}$$

düsturunun köməyi ilə hesablanır.

$$\text{Uyğun çəkili düsturlar} \quad G(x) = \sqrt[n]{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_k^{n_k}} \quad \text{və} \quad H = \frac{n}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{z_i}}$$

şəklində olar.

Üstlü ortanın ümumi şəkli aşağıdakı kimidir:

$$\bar{x} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n}}$$

k qüvvətinin dəyişilməsilə, $\bar{x}$ seçmə ortasının müxtəlif növlərini almaq olar:

k=-1 olduqda harmonik orta alınır:

$$\bar{X}_{har} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Aydındır ki, k=0 olduqda həndəsi orta alınır:

$$\bar{x}_{h\bar{a}n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{\prod x_i}$$

k=1 olduqda hesabı orta kəmiyyət alınır.

$$\bar{x}_{hes} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

k=2 olduqda isə kvadratik orta kəmiyyət alınır.

$$\bar{x}_{kv} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Aydındır ki, eyni bir seçmə üçün hesablanmış müxtəlif orta kəmiyyətlər də müxtəlif olacaqdır. k qüvvəti artdıqca uyğun orta kəmiyyət artır:

$$\bar{x}_{har} < \bar{x}_{h\bar{a}n} < \bar{x}_{hes} < \bar{x}_{kv}$$

Üstlü ortaların bu xassəsi majorantlıq xassəsi adlanır. Bu münasibəti birinci dəfə A.Y. Boyarski isbat etmişdir.

Orta kəmiyyətin bu və ya digər növünün seçilməsi tədqiqatların məqsədindən, ilkin məlumatların xarakterindən və orta kəmiyyəti hesablanan göstəricinin iqtisadi mahiyyətindən asılıdır. Əlamətin dəyişən qiymətlər yığımını hər hansı bir ədədlə xarakterizə etmək zərurəti yarandıqda əlamətin paylanmada orta qiyməti göstəricisindən istifadə edilir. Bu zaman əlamətin dəyişən qiyməti onların seçmə ortası ilə əvəz edilir. Bu isə o zaman mümkün olar ki, aparılan əməliyyat öyrənilən əlamətə görə yığımın əsas xassəsini dəyişməsin.

Təsadüfi seçimin modası. Modanın hesablanması üçün xətti interpolasiya düsturu.

Tərif 3. Təsadüfi seçimin ən böyük tezliyə malik olan elementinə seçmənin modası deyilir.

Qruplaşdırılmamış seçmələr üçün modanı təyin etmək üçün heç bir hesablama aparmaq lazım gəlmir. Belə ki, tərifə əsasən paylanma sırasında ən böyük tezliyə uyğun olan element moda olacaqdır.

$$\text{Qruplaşdırılmış seçmələr üçün } d = X_0 + b \frac{n_2 - n_1}{2n_2 - n_1 - n_3}$$

xətti interpolasiya düsturunun köməyi ilə təyin edilir.

Burada X_0 –modal intervalın başlanğıc nöqtəsi, b- onun uzunluğu, n_2 - modal intervalın, n_1 - modal intervaldan əvvəlki, n_3 -isə modal intervaldan sonra gələn intervalın tezliyidir.

Təsadüfi seçimin medianı və kvartili. Median və kvartilin hesablanması üçün xətti interpolasiya düsturları.

Tərif 4. Seçmənin variasiya sırasını hər birində təxminən eyni sayda element olan iki bərabər hissəyə ayıran elementə seçimin medianı deyilir.

Qruplaşdırılmamış seçmələr üçün bilavasitə tərifə əsasən median seçimin həcmi n tək ədəd ($n=2l+1$) olduqda $h=x^{(l+1)}$, cüt ədəd ($n=2l$) olduqda isə $h = \frac{1}{2}(x^{(l)} + x^{(l+1)})$ kimi hesablanır.

Qruplaşdırılmış seçmələr üçün medianı aşağıdakı iki təqribi üsulla hesablamaq olar.

1) Seçmənin elementi olaraq qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsi götürülür və median seçmənin həcmnin təkliyi və cütlüyündən asılı olaraq yuxarıda göstərilən müvafiq düsturlar vasitəsilə hesablanır.

$$2) h = X_0 + b \frac{\frac{n}{2} - S_{m-1}}{n_m}$$

Burada X_0 median intervalın başlanğıc nöqtəsi, n_m -onun tezliyi, S_{m-1} isə median intervaldan əvvəlki intervalların tezlikləri cəmidir.

Aydındır ki, birmodalı simmetrik paylanmalar üçün hesabi orta, moda və median bir-birinə bərabərdir. Bunu asimmetrik paylanmalar üçün demək olmaz. K.Pirson paylanma ayrılmasının müxtəlif növlərinin hamarlaşdırılması əsasında yerləşmə xarakteristikaları arasında aşağıdakı təqribi bərabərliyin doğru olduğunu göstərmişdir:

$$h \approx \frac{1}{3}d + \frac{2}{3}\bar{x}_{hes.}$$

Hesabi orta və medianın təyini nisbətən asan olduğuna görə axırıncı bərabərlikdən modanın hesablanması üçün

$$d \approx \bar{x}_{hes.} - 3(\bar{x}_{hes.} - h)$$

və ya

$$d \approx \bar{x}_{hes.} + 3(h - \bar{x}_{hes.})$$

təqribi düsturlarını alırıq.

Riyazi statistikada əlamətin variasiyasını ölçmək üçün dispersiya və orta kvadratik kənarlaşma ilə yanaşı kvantil göstəricisindən də istifadə edilir. Bu göstərici median anlayışını bir qədər genişləndirməklə qurulur.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, median variasiya sırasını iki bərabər hissəyə ayırır. Alınmış hissələri yenidən iki bərabər hissəyə ayırmaqla, əlamətin elə qiymətlərini tapmaq olar ki, onlar variasiya sırasını dörd bərabər hissəyə ayırsın və s. Əlamətin variasiya sırasını eyni sayda variantlardan ibarət olan hissələrə ayıran qiymətlərinə kvantil və yaxud qradient deyilir. Kvartil, desil, sentil kvantilin xüsusi hallarıdır.

Əlamətin variasiya sırasının dörd bərabər hissəyə ayıran qiymətlərinə kvartil deyilir. Desil və sentil uyğun olaraq əlamətin variasiya sırasını on və yüz bərabər hissələrə ayıran qiymətlərinə deyilir.

Əlamətin variasiya sırasını dörd bərabər hissələrə ayıran qiymətlərini Q_1 , Q_2 və Q_3 ilə işarə edək.

Aydındır ki, əlamətin qiymətlərinin $\frac{1}{4}$ hissəsi birinci Q_1 kvartilindən solda, $\frac{3}{4}$ hissəsi isə ondan sağ tərəfdə yerləşir. İkinci Q_2 kvartili variasiya sırasını iki bərabər hissəyə ayırdığına görə o median ilə üst-üstə düşür.

Variantların $\frac{1}{4}$ hissəsi Q_1 -dən solda, $\frac{1}{4}$ hissəsi Q_1 və Q_2 arasında, $\frac{1}{4}$ hissəsi Q_2 və Q_3 arasında, $\frac{1}{4}$ hissəsi isə Q_3 -dən sağda yerləşir.

Qruplaşdırılmış seçmələr üçün əlamətin kvartil qiymətlərini müəyyən etdikdə

$$Q_1 = X_{Q_1} + \frac{h}{n_{Q_1}}(\frac{n}{4} - S_{Q_1-1})$$

$$Q_3 = X_{Q_3} + \frac{h}{n_{Q_3}} \left(\frac{3}{4} n - S_{Q_3-1} \right)$$

interpolyasiya düsturlarından istifadə edilir.

Burada, X_{Q_1} və X_{Q_3} uyğun olaraq Q_1 və Q_3 kvartillərini öz daxilində saxlayan intervalların sol uclarıdır; n_{Q_1} və n_{Q_3} kvartil intervalların tezlikləridir; n - seçmənin həcmi, h isə qruplaşdırma intervallarının uzunluğudur; S_{Q_1-1} və S_{Q_3-1} kvartil intervaldan əvvəlki intervalların tezlikləri cəmidir (yığılmış tezlik).

Seçmə ortanın xassələri. Orta qiymət haqqında teorem.

Tutaq ki, X və Y baş yığımları arasında $Y = aX + b$ xətti asılılığı vardır (burada a və b ixtiyari sabitlərdir).

Teorem 2. $y = ax + b$ olduqda $\bar{y} = a\bar{x} + b$ olar.

İsbatı. X və Y baş yığımları arasında $y = ax + b$ xətti asılılığı oldu

Tərifə əsasən

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k y_j \cdot n_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (az_j + b)n_j = a \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k z_j n_j + b \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k z_j n_j \quad \text{və} \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j = 1 \quad \text{olduğunu nəzərə alsaq,}$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b \quad \text{olduğunu alırıq.}$$

Xassə 1. Seçmənin elementlərini eyni bir b kəmiyyəti qədər artırısaq (azaltsaq), hesabi orta da b qədər artar (azalar).

Xassə 2. Seçmənin elementlərini a dəfə artırısaq (azaltsaq) hesabi orta da a dəfə artar (azalar).

1 və 2 xassələrinə hesabi ortanın monotonluq xassəsi deyilir.

$$x^{(1)} = \min(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \text{və} \quad x^{(n)} = \max(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

işarə edək. Aydındır ki,

$$x^{(1)} \leq \bar{x} \leq x^{(n)}$$

olar. Yəni hesabi orta daxili ortadır.

Hesabi orta assosiativlik xassəsini də ödəyir.

Xassə 3. Seçmənin elementlərinin bir hissəsini onların xüsusi ortası ilə əvəz etsək hesabi ortası dəyişməz.

Xassə 4. Hesabi ortadan kiçik olan elementlərin hesabi ortadan kənarlaşmaları cəmi, hesabi ortanın ondan böyük elementlərdən kənarlaşmaları cəminə bərabərdir.

Xassə 5. Seçmənin elementlərinin tezliklərini d dəfə artırısaq (azaltsaq) hesabi orta dəyişməz.

Tutaq ki, l qrup elementlər çoxluğu vardır. i -ci ($i = \overline{1, l}$) qrupun elementləri sayını n_i , seçmə ortasını isə $\bar{x}_i$ ilə işarə edək. Bu qrupları birləşdirdikdə alınan yeni yığımın seçmə ortasını $\bar{x}$ ilə işarə edək. $\bar{x}_i$ -lərə ($i = \overline{1, l}$) qrup ortaları, $\bar{x}$ -ə isə ümumi orta deyilir.

Teorem 3 (orta qiymət haqqında). Ümumi orta qrup ortalarının hesabı çəkili ortasına bərabərdir. Yəni

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \bar{x}_i n_i$$

İsbatı. Tutaq ki, qruplar aşağıdakı şəkildədir.

1-ci qrup – $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$

2-ci qrup – $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$

l-ci qrup - $x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ln_l}$

onda $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, $i=1,2,\dots,l$ olar.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l n_i \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \bar{x}_i n_i \text{ olar.}$$

Deməli, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \bar{x}_i n_i$

Səpələnmə xarakteristikaları

Tərif 5. Seçmənin elementlərinin onun hər hansı yerləşmə xarakteristikası ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsinin ölçüsünü göstərən sabit ədədə onun səpələnmə xarakteristikası deyirlər.

Aşağıda baxacağımız variasiya genişliyi, orta xətti meyl, dispersiya, orta kvadratik meyl, variasiya əmsalı seçmənin səpələnmə xarakteristikalarıdır.

Tərif 6. Seçmənin ən böyük elementi ilə ən kiçik elementi arasındakı fərqə seçmənin variasiya genişliyi deyilir.

Variasiya genişliyini R ilə işarə etsək,

$$R = x^{(n)} - x^{(1)}$$

olduğunu yaza bilərik. Beləliklə, variasiya genişliyi seçmənin elementlərinin bir – birindən tərəddüdlərinin ən yüksək həddini göstərir.

İndi isə seçmənin orta xətti meylinin və dispersiyasının hesablanması üçün uyğun düsturları verək. Ehtimal nəzəriyyəsiindən məlumdur ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətlərini uyğun olaraq $p_i = P(X=x_i)$, $i = \overline{1, n}$ ehtimalları ilə alan diskret təsadüfi kəmiyyətin orta xətti meyli və dispersiyası uyğun olaraq.

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| p_i$$

və

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 p_i$$

düsturları ilə hesablanır. Seçmə üçün $p_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1, n}$ olduğunu nəzərə alsaq, seçmənin orta xətti meyli və dispersiyası üçün uyğun olaraq

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

düsturlarını alırıq. Seçmənin elementləri müxtəlif tezliklərə malik olduqda orta xətti meylin çəkili düsturu

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k |z_i - \bar{x}| n_i$$

dispersiyasının çəkili düsturu isə

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})^2 n_i$$

şəklində yazılar.

$$\text{Tərif 7. } \sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

ədədinə seçmənin orta kvadratik meyli

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

ədədinə isə onun variasiya əmsalı deyilir.

Tərifə görə, variasiya əmsalı orta kvadratik meylin riyazi gözləməyə faizlə nisbətidir. Başqa sözlə, v kəmiyyəti σ -nın $\bar{x}$ -in neçə faizi olduğunu göstərir.

Orta xətti və orta kvadratik meyl hadisələrin təbii xüsusiyyətlərinə uyğun ölçü vahidləri ilə ifadə olunduqlarına görə, onlar müxtəlif kəmiyyətlərin orta tərəddüd dərəcələrini bir-biri ilə müqayisə etməyə imkan vermir. Variasiya əmsalı müxtəlif ölçü vahidləri ilə ifadə olunan bir neçə kəmiyyətin orta tərəddüd dərəcələrini müqayisə etməyə imkan verir.

Hər hansı yığımnda müxtəlif amillərin və yaxud bir amilin müxtəlif ortaya malik bir neçə yığımlarda tərəddüd dərəcələrini müqayisə etmək üçün nisbi variasiya göstəricilərindən istifadə edilir. Bu göstəricilər mütləq variasiya göstəricilərinin orta kəmiyyətə (və yaxud medianə) nisbəti kimi hesablanır. Mütləq göstərici olaraq, variasiya genişliyini, orta kvadratik kənarlaşmanı və kvartil kənarlaşmanı götürməklə nisbi variasiya göstəricilərini müəyyən etmək olar.

Osilyasiya əmsalı

$$K_R = \frac{R}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

Nisbi xətti kənarlaşma

$$K_E = \frac{E}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

Variasiya əmsalı

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

Kvartil variasiyası

$$K_Q = \frac{Q}{h} \cdot 100\% \quad \text{və ya} \quad K_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2Q_2} \cdot 100\%$$

Praktikada ən çox istifadə edilən variasiya əmsalıdır. Bu göstəricidən müxtəlif

əlamətlərin variasiyasını müqayisə etməklə yanaşı, yığımın bircinsliyini müəyyən etmək üçün də istifadə edilir. Belə ki, normal paylanmaya və yaxud ona yaxın olan paylanmaya malik yığımlarda variasiya genişliyi 33% -i aşmadıqda onlar bircinsli hesab edilir.

Qeyd etmək lazımdır ki, bəzi hallarda dispersiyanı

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i^2 n_i - \bar{x}^2$$

düsturunun köməyi ilə hesablamaq əlverişli olur.

Doğrudan da, tərifə əsasən

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i^2 n_i - 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i \cdot n_i + \\ &\quad + \bar{x}^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i \cdot n_i &= \bar{x} \quad \text{və} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i = n \end{aligned}$$

olduğunu nəzərə alsaq, düsturun doğruluğu alınar.

Dispersiyanın xassələri.

Teorem 4. Tutaq ki, X və y baş yığımları arasında $y=aX+b$ xətti asılılığı vardır. Onda

$$\sigma_y^2 = a^2 \cdot \sigma_x^2$$

olar.

İsbatı: $y=aX+b$ olduğuna görə

$$y_i = a z_i + b, \quad i = \overline{1, k} \quad \text{olar.}$$

Teorem (2.2) -yə əsasən $\bar{y} = a\bar{x} + b$

Onda,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (a z_i + b - a\bar{x} - b)^2 n_i = \\ &= a^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})^2 n_i = a^2 \sigma_x^2 \end{aligned}$$

Beləliklə, $\sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2$

Teorem 4-dən aşağıdakı nəticələrə gəlmək olar.

Nəticə 1. Seçmənin bütün elementlərini eyni kəmiyyət qədər artırısaq və yaxud azaltsaq dispersiya dəyişməz. Yəni $\sigma_{x \pm A}^2 = \sigma_x^2$.

Nəticə 2. Seçmənin bütün elementlərini k dəfə artırısaq (azaltsaq) dispersiya k^2 dəfə artar (azalar). Yəni

$$\sigma_{kx}^2 = k^2 \sigma_x^2 \quad \text{və} \quad \sigma_{\frac{x}{k}}^2 = \frac{1}{k^2} \sigma_x^2$$

Nəticə 3. Elementlərin tezliklərini k dəfə artırısaq (azaltsaq) dispersiya dəyişməz.

Doğrudan da,

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{d} n_i}{\sum \frac{n_i}{d}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{d} \sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\frac{1}{d} \sum n_i} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i}$$

Nəticə 4 (Dispersiyanın minimallıq xassəsi):

$S = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$ cəmi özünün ən kiçik qiymətini $a = \bar{x}$ olduqda alır.

Yəni,

$$\min_a S = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Doğrudan da, $\frac{dS}{da} = -2 \sum (x_i - a) n_i = 0$. Buradan $\sum (x_i - a) n_i = 0$ olduğunu alırıq.

Axırıncı tənlikdən

$$a = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \bar{x} \text{ olduğunu tapırıq.}$$

Alternativ əlamətin dispersiyası

Statistik təhlildə tez - tez alternativ əlamətin dispersiyasına təsadüf edilir. Statistika əlamətin variasiyasını öyrənməklə yanaşı əlamətə malik olan və ya olmayan vahidlərin hissəsini də öyrənir.

Tutaq ki, həcmi n olan seçmədə m sayda element əlamətə malikdir, qalan $n-m$ sayda element isə əlamətə malik deyildir. Onda əlamətə malik olanların hissəsi $p = \frac{m}{n}$, malik

olmayanlarınkı isə $q = \frac{n-m}{n}$ olar. Aydınır ki, $p+q=1$.

Alternativ əlamətin variasiyasının kəmiyyət ölçüsünü müəyyən etmək üçün şərti olaraq əlamətin varlığını "1" ilə, yoxluğunu isə "0" ilə işarə edək. Onda alternativ əlamətin paylanma sırasını aşağıdakı kimi təsvir etmək olar.

x_i	0	1
n_i	q	p

Alternativ əlamətin orta qiyməti

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot q + 1 \cdot p}{p + q} = p$$

olar. Dispersiya isə

$$\sigma^2 = \frac{(0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p}{q + p} = \frac{p^2 q + q^2 p}{p + q} = pq(p + q) = pq$$

olar. Alternativ əlamətin orta kvadratik kənarlaşması isə

$$\sigma = \sqrt{pq}$$

olar. Eyni zamanda aydındır ki, pq hasili özünün maksimum qiymətini $p=q=\frac{1}{2}$ olduqda alır. Ona görə də alternativ əlamətin dispersiyasının maksimal qiyməti 0,25 olar.

Dispersiyaların toplanması qanunu

Bir çox hallarda təcrübədə bir neçə qrupun birləşməsindən alınan yığımlı və tərsinə baş yığımın ayrı-ayrı qruplara bölünməsindən alınan yığımları öyrənmək lazım gəlir. Eyni zamanda baş yığımın və onu təşkil edən qrupların xarakteristikaları arasındakı əlaqəni müəyyən etmək lazım gəlir. Biz riyazi gözləmələr arasındakı əlaqənin orta qiymət haqqında teorem vasitəsilə verildiyini isbat etdik. İndi isə dispersiyalar arasındakı əlaqəni verək. Bu əlaqə dispersiyaların toplanması qanunu ilə verilir.

Tutaq ki, bir qrup elementlər çoxluğu verilmişdir:

$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \dots, x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ln_l}$. i -ci qrupdakı elementlərin sayını n_i , i -ci qrupun riyazi gözləməsini $\bar{x}_i$ və dispersiyasını σ_i^2 ilə işarə edək. $i = 1, 2, \dots, l$ olduqda $\bar{x}_i$ -lərə qrup ortaları, σ_i^2 -lara isə qrupdaxili dispersiyalar deyilir. Bu qruplara bir baş yığım kimi baxsaq, onun həcmi $n = \sum_{i=1}^l n_i$ olar. $\bar{x}$ ilə baş yığımın riyazi gözləməsini, σ^2 ilə isə dispersiyasını işarə edək

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$$

ifadəsinə qruplararası dispersiya deyilir.

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sigma_i^2 \cdot n_i$$

ifadəsi isə orta qrupdaxili dispersiya adlanır.

Teorem 6. Ümumi dispersiya orta qrupdaxili dispersiya ilə qruplararası dispersiyanın cəminə bərabərdir.

Yəni

$$\sigma^2 = \overline{\sigma^2} + \sigma_x^2$$

İsbatı: Doğrudan da

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i + \\ &+ \bar{x}_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}) + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

Teorem 1 –ə əsasən

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^l (\bar{x}_i - \bar{x}) \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i) = 0$$

Digər tərəfdən

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^l (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i = n \cdot \sigma_x^2$$

və

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l n_i \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sigma_i^2 \cdot n_i \end{aligned}$$

Beləliklə, $\sigma^2 = \overline{\sigma^2} + \sigma_x^2$ olduğunu alırıq.

Riyazi gözləmə və dispersiyanın hesablanması üçün şərti sıfır (moment) üsulu

Riyazi gözləmə və dispersiyanın düsturlarından aydın görünür ki, onları hesablamaq çox zəhmət tələb edir. Ona görə də bu xarakteristikaları hesablamaq üçün şərti sıfır üsulundan istifadə edilir. Bu üsul onların məlum xassələrinə əsaslanır.

Tutaq ki, X baş yığımından həcmi n olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsi götürülmüşdür və bu seçmənin paylanma sırası

z_i	z_1	z_2	...	z_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

şəklindədir.

$u_i = z_i - c$, $i = \overline{1, k}$ əvəzləməsini aparaq. Burada c ixtiyari sabitdir. Əvəzləmə nəticəsində alınmış $u_1, u_2, \dots, u_k$ ədədlərinə

$$U = X - C$$

baş yığımından seçmə kimi baxmaq olar. Onda teorem 2.2-yə əsasən

$$\bar{u} = \bar{x} - c \quad \text{və} \quad \bar{x} = \bar{u} + c,$$

teorem 4.-ə əsasən isə

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 \quad \text{olar.}$$

Qruplaşdırılmış seçmələrdə uyğun düsturları almaq üçün $u_i = \frac{1}{b}(z_i - c)$, $i = \overline{1, k}$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır. Burada, b- qruplaşdırma intervalının uzunluğu, z_i -isə qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsidir. Bu halda riyazi gözləmə

$$\bar{\tilde{o}} = b\bar{u} + c$$

dispersiya isə

$$\sigma_x^2 = b^2 \sigma_u^2$$

düsturu ilə hesablanır. Bu düsturları açıq şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k \frac{z_i - c}{b} n_i \right) \cdot b + c$$

və

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{z_i - a}{b} \right)^2 \cdot n_i \right) \cdot b^2 - (\bar{x} - a)^2$$

Qeyd etmək lazımdır ki, təcrübədə adətən C olaraq, ya seçmənin modası, ya da ki,

riyazi gözləməyə yaxın ədəd götürülür. Belə ki, C-nin seçilməsi konkret məsələdən asılıdır.

Təsadiüfi seçimin momenti. Mərkəzi və başlanğıc momentlər.

Tutaq ki, X baş yığımından həcmi n olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsi alınmışdır və onun paylanma sırası

z_i	z_1	z_2	...	z_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

şəklindədir. $c > 0$ və s natural ədəddir.

Tərif 1. $a_s(c) = \sum_{i=1}^n (x_i - c)^s$ ədədinə seçmənin c ədədinə görə s- tərtibli momenti deyilir.

Seçmənin elementləri müxtəlif tezliklərə malik olduqda s- tərtibli moment üçün çəkili düstur

$$a_s(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (z_i - c)^s n_i$$

şəklində olar.

Tərif 2: $c=0$ olduqda $a_s(c) = \sum_{i=1}^n (x_i - c)^s$ momentinə başlanğıc moment, $c = \bar{x}$ olduqda isə mərkəzi moment deyilir.

$$b_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^s \quad (\text{sadə düstur})$$

$$b_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i^s \cdot n_i \quad (\text{çəkili düstur})$$

Mərkəzi moment üçün uyğun düsturlar aşağıdakı kimi olar.

$$m_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^s \quad (\text{sadə düstur})$$

$$\text{və } m_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})^s \cdot n_i \quad (\text{çəkili düstur})$$

Başlanğıc və mərkəzi momentlər arasında əlaqə düsturları aşağıdakı teoremin köməyi ilə verilir.

Teorem 7.

$$m_s = \sum_{i=0}^s c_s^i (-b_1)^{s-i} b_i,$$

İsbatı. Doğrudan da istənilən α və β ədədləri üçün yaza bilərik:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (z_i - \alpha)^s \cdot n_i &= \sum_{i=1}^k [(z_i - \beta) + (\beta - \alpha)]^s \cdot n_i = \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=0}^s c_s^j (z_i - \beta)^j (\beta - \alpha)^{s-j} \right) \cdot n_i = \\ &= \sum_{j=0}^s c_s^j (\beta - \alpha)^{s-j} \left(\sum_{i=1}^k (z_i - \beta)^j n_i \right) \end{aligned}$$

Bu düstur, α ədədinə görə s- tərtibli momenti, β ədədinə görə s-dən kiçik tərtibli momentlərlə ifadə etməyə imkan verir.

Axırıncı düsturda əvvəlcə $\alpha = \bar{x}$, $\beta = 0$ qəbul etsək

$$m_s = \sum_{i=0}^s c_s^i (-b_1)^{s-i} b_i, \text{ sonra isə } \alpha = 0, \quad \beta = \bar{x} \text{ qəbul etsək düsturunu alarıq.}$$

Xüsusi halda aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$\begin{aligned} m_2 &= b_2 - b_1^2 & b_2 &= b_1^2 + m_2 \\ (m_3 &= 2b_1^2 - 3b_1 b_2 + b_3 & b_3 &= b_1^3 + 3b_1 m_2 + m_3 \\ m_4 &= 3b_1^4 + 6b_1^2 b_2 - 4b_1 b_3 + b_4 & b_4 &= b_1^4 + 6b_1^2 m_2 + 4b_1 m_3 + m_4 \end{aligned}$$

Empirik paylanmanın tədqiqi. Asimmetriya və eksəs əmsalları.

Əgər baxılan empirik paylanmanın nəzəri forması məlumdursa, mərkəzi meyli və səpələnmə xarakteristikaları paylanmanın əsaslı xarakteristikalarıdır. Beləliklə, bu halda birtərtibli və ikitərtibli momentləri bilmək kifayətdir. Belə ki, əgər tədqiq edilən hadisə kifayət qədər yaxşı öyrənilibsə və onun normal paylanmaya malik olduğu məlumdursa, onda bu paylanma birinci iki mərkəzi momentlə bir qiymətli müəyyən edilir.

Əgər öyrənilən hadisə Puasson qanununa tabedirsə, onda paylanma bir momentlə (birtərtibli başlanğıc və ya ikitərtibli mərkəzi) tamamilə müəyyən edilir.

Ancaq əksər hallarda paylanmanın nəzəri forması məlum olmur. Ona görə də empirik paylanmaya əsasən nəzəri paylanmanın bəzi xassələrinin öyrənilməsi məsələsi yaranır.

Empirik paylanmanın qrafikini (poliqon və ya histogram) qurmaqla nəzəri paylanma qanunu haqqında təxmini təsəvvür yaratmaq olar. Empirik paylanma isə baş yığımdan götürülmüş seçməyə əsasən qurulur. Ona görə də empirik məlumatlar müəyyən dərəcədə qiyməti məlum olmayan təsadüfi xətlərlə bağlıdır. Bu təsadüflərin təsiri əlamətin dəyişməsinin əsas qanunauyğunluğunun dərk edilməsini çətinləşdirir. Seçmənin həcmi artdıqca poliqon hamarlaşır və səlis əyriyə çevrilir. Alınmış əyriyə paylanma əyrisi deyilir.

Paylanma əyrisi baş yığının paylanmasını (nəzəri paylanma) xarakterizə edir. Paylanmanın formasının tədqiqi aşağıdakı üç məsələnin həllini nəzərdə tutur:

- 1) Paylanmanın ümumi xarakterinin aydınlaşdırılması;
- 2) Empirik paylanmanın hamarlandırılması, yəni verilmiş formaya malik $f(x)$ əyrisinin qurulması;
- 3) Tapılmış nəzəri paylanmanın empirik paylanmaya uyğunluğunun yoxlanılması.

Statistik tədqiqatda müxtəlif növ paylanmalara təsadüf edilir. Bircins yığımlar bir qayda olaraq birtəpəli paylanmalara malik olurlar. Çoxtəpəlilik yığının bircins olmamasına dəlalat edir. Paylanmanın ümumi xarakterinin aydınlaşdırılması onun bircinslik dərəcəsinin qiymətləndirilməsini və asimmetriya və eksəs əmsallarının hesablanması nəzərdə tutur. Simmetrik paylanmalarda mərkəzdən eyni uzaqlıqda yerləşən

variantlar eyni tezliklərə malikdirlər. Bu paylanmalar üçün hesabi orta, moda və median bir-birinə bərabərdir. Ona görə də sadə asimmetriya göstəricisi olaraq bu göstəricilərin fərqlərini qəbul etmək olar. $\bar{x} - d$ fərqi nə qədər böyük olsa, paylanmanın asimmetriyası bir o qədər böyük olacaqdır.

Bir neçə yığının asimmetriya dərəcəsinin müqayisəli təhlili üçün nisbi

$$As = \frac{\bar{x} - d}{\sigma}$$

göstəricisi hesablanır. Bu göstərici müsbət və mənfi qiymətlər ala bilər.

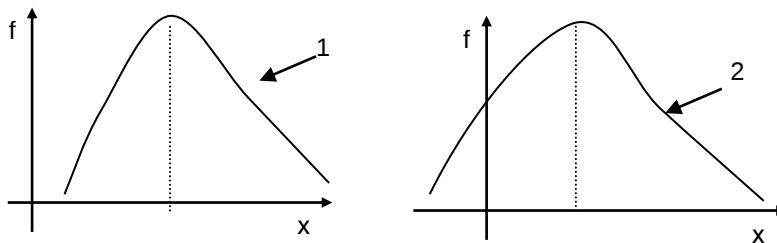
$As > 0$ olması sağ tərəfli asimmetriyanın olduğunu göstərir (sağ budaq maksimal ordinatına görə sol budağa nisbətən daha çox uzadılmışdır).

Sağ tərəfli asimmetriyada mərkəzi meyl xarakteristikaları arasında

$$d < h < \bar{x}$$

münasibəti doğrudur

$As < 0$ olması sol tərəfli asimmetriyanın olduğunu göstərir



Şəkil 2. Asimmetrik paylanma sırası.

1- sağ tərəfli asimmetriya, 2-sol tərəfli asimmetriya

Simmetrik paylanmalarda müsbət və mənfi kənarlaşmaların tək dərəcələri bir-birini yox edir.

Beləliklə, tək tərtibli mərkəzi momentlərin sıfıra bərabərliyi paylananın simmetrikliliyini sübut edir. Bu momentlərin sıfırdan fərqli olması isə simmetriyadan kənarlaşmanı, yəni əyilməni göstərir. Ona görə də əyilməni xarakterizə etmək üçün üç tərtibli m_3 mərkəzi momentindən istifadə edilir.

Momentlər qəbul edilmiş ölçü vahidlərindən asılı olduqlarına görə, əyilmənin ölçüsü olaraq $\frac{m_3}{\sigma^3}$ standartlaşdırılmış nisbətindən istifadə edilir.

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

kəmiyyətinə asimmetriya (əyilmə) əmsalı deyilir.

Bu göstəricinin tətbiqi asimmetriya dərəcəsini təyin etməklə yanaşı əlamətin baş yığında paylanmasında asimmetriyanın olub-olmamasını da müəyyən etməyə imkan verir.

Bu göstəricinin əhəmiyyətlik dərəcəsi

$$\sigma_{As} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}$$

düsturu ilə hesablanan orta kvadratik xəta vasitəsilə qiymətləndirilir. Belə ki, $\frac{|As|}{\sigma_{As}} > 3$ olduqda asimmetriya əhəmiyyətlidir və əlamətin baş yığında paylanması simmetrik

deyildir. $\frac{|A_s|}{\sigma_{As}} < 3$ olduqda isə asimetriya əhəmiyyətsizdir və onun varlığı ancaq təsadüfi amillərin təsiri ilə izah edilir.

Paylanma funksiyası qrafikinə normal əyriyə görə yuxarı və aşağı olduğunu təyin etmək üçün əksə əmsalından istifadə edilir.

Dörd tərtibli mərkəzi moment vasitəsilə təyin olunan

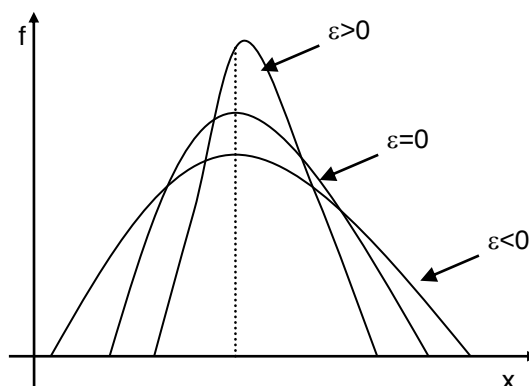
$$e = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$$

kəmiyyəti əksəsi daha dəqiq xarakterizə edir. Qeyd edək ki, normal paylanmalar üçün $\frac{m_4}{\sigma^4} = 3$. Əməli məsələlərin həllində qruplaşdırılmış seçmələr üçün asimetriya və əksə əmsallarını aşağıdakı düsturların köməyi ilə hesablamaq daha məqsədəuyğundur:

$$a = \frac{1}{\sigma_u^2} (b_3 - 3b_2b_1 + 2b_1^3)$$

$$e = \frac{1}{\sigma_u^4} (b_4 - 4b_1b_3 + 6b_1^2b_2 - 3b_1^4) - 3.$$

Burada $\sigma_u^2 = \frac{1}{n} \sum (z_i - c)^2$ şərti variantlarının dispersiyası; b_1, b_2, b_3 isə həmin variantların uyğun tərtibli başlanğıc momentləridir.



Şəkil . 2.3. Paylanmanın əksəsi

Əksə empirik paylanmanın təpə nöqtəsinin normal əyrinin təpə nöqtəsinə nisbətən yuxarıda və ya aşağıda yerləşməsinə göstərir.

Əksənin orta kvadratik xətası

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{2nn(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}$$

düsturu ilə hesablanır

İkiölçülü təsadüfi kəmiyyətin təsviri və ədədi xarakteristikaları.

Tutaq ki $(x_i, n_i), i = 1, 2, \dots, n$, ikiölçülü (X, Y) təsadüfə kəmiyyətin müşahidələrinin həcmi n olan seçimidir. Baş yığımın ilkin təsvirini seçimin eləntilələrinin müstəvidə yerləşməsinə əsasən əldə etmək olar.

$(x_i, n_i), i = 1, 2, \dots, n$, qiymətlərini uyğun olaraq $\frac{1}{n}$ ehtimalları ilə alan ikiölçülü diskret

təsadüfə vektorun paylanması ikiölçülü təsadüfə seçim paylanması deyilir. Seçmə xarakteristikalar uyğun diskret təsadüfə vektorun xarakteristikaları kimi hesablanır.

Seçmə xarakteristikaların hesablamasını aşağıdakı ardıcılıqla aparmaq məqsəduyğundur. Əvvəlcə

$$\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n y_i^2, \sum_{i=1}^n x_i y_i, \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2$$

cəmləri hesablanır.

Hesablamaların düzgünlüyü

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2$$

eyniliyinin köməyi ilə yoxlanılır.

Seçmə ortalar

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

kimi hesablanır. Sonra isə seçmə ortadan kənarlaşmaların kvadratları cəmi, və hasillərin və seçmə ortadan kənarlaşmaları cəmi hesablanır:

$$Q_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n},$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n},$$

$$Q_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n} Q_x, S_y^2 = \frac{1}{n} Q_y, r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x Q_y}}$$

Bölmə10. PAYLANMA PARAMETRLƏRİNİN STATİSTİK QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

Nöqtəvi qiymətləndirmələr və onların qurulması üsulları

Məsələnin qoyuluşu. Statistik qiymətləndirmələr

Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyətinin (X baş yığımının) paylanma funksiyası məlum deyil, ancaq onun hansı şəkildə funksiya olduğu və müəyyən sayda naməlum parametrlərdən asılı olan funksiyalar sinfinə daxil olduğu məlumdur. Yəni, paylanma funksiyası $F(x)=F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ şəklindədir. Bu funksiyanı tapmaq üçün asılı olmayan n sınaq aparılır (X baş yığımından həcmi n olan təsadüfi seçim götürülür) və nəticədə $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçimi alınır. Məsələnin qoyuluşu $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçiminə əsasən naməlum $F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ funksiyasının tapılmasından ibarətdir. Aydın ki, bu halda naməlum paylanma funksiyasının tapılması məsələsi, onun $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ parametrlərinin $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçiminə əsasən tapılması məsələsinə gətirilir. Qeyd etmək lazımdır ki, ümumiyyətlə seçmə yığımın elementləri vasitəsilə naməlum parametrlərin əsl qiymətlərini tapmaq mümkün deyildir. Belə ki, bu yolla həmin parametrlərin ancaq təqribi qiymətlərini tapmaq olar.

Tutaq ki, $F(x, \theta)$ paylanma funksiyası ancaq bir naməlum θ parametridən asılıdır.

Tərif 1.1. Naməlum θ parametridin $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçiminə əsasən alınmış θ_h təqribi qiymətinə onun nöqtəvi qiymətləndirməsi deyilir.

Aydın ki, θ_h qiymətləndirməsi seçmənin elementlərinin müəyyən funksiyasıdır, yəni $\theta_h = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Seçmənin elementlərindən asılı olan istənilən funksiya statistika deyildir.

Beləliklə, naməlum θ parametri üçün çoxlu sayda qiymətləndirmələr qurmaq olar. Onda belə bir sual qarşıya çıxır: hansı şərtləri ödəyən $\theta_h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyasını naməlum θ parametri üçün ən yaxşı qiymətləndirmə hesab etmək olar?

θ_h qiymətləndirməsi aşağıdakı şərtləri ödədikdə o, digər qiymətləndirmələrə nisbətən müəyyən mənada “yaxşı” qiymətləndirmə hesab edilir.

Tərif.2. Riyazi gözləməsi qiymətləndirilən parametərə bərabər olan, yəni istənilən n üçün

$$E\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta$$

bərabərliyini ödəyən $\theta_h = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymətləndirməsinə θ parametridin yerindəyişməyən (sürüşdürülməmiş) qiymətləndirməsi deyilir.

Tərif. 3. Riyazi gözləməsi qiymətləndirilən parametrdən fərqli olan, yəni istənilən n üçün

$$E\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \theta$$

bərabərliyini ödəyən $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymətləndirməsinə yerindəyişən (sürüşdürülmüş) qiymətləndirmə deyilir.

Bu halda $E\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta = \delta_h$ fərqi nə yerdəyişmə (sürüşmə) deyilir.

$E\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta$ şərti ödənildikdə sonlu həcmə malik müxtəlif mümkün seçmələrə görə qurulmuş $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistikasının qiymətləri θ kəmiyyəti ətrafında qruplaşacaqlar (yerləşəcəklər).

Naməlum θ parametrinin verilmiş seçməyə görə θ_n^* qiymətləndirməsini qurarkən (taparkən) çalışmaq lazımdır ki, kifayət qədər böyük ehtimalla θ_n^* , θ parametrinin əsl qiymətinə yaxın olsun. Seçmənin həcmi kiçik olduqda təsadüfi seçmənin böyük rol oynamasına görə buna nail olmaq mümkün deyil. Ona görə də bu halda seçmənin həcmnin kifayət qədər böyük olduğu fərz edilir və tələb edilir ki, $n \rightarrow \infty$ şərtində parametrin qiymətləndirilməsi hər hansı mənada (ehtimala görə, vahid ehtimalla, orta kvadratik mənada və s.) həmin parametrin özünə yığılsın.

Tərif 4. θ_n^* qiymətləndirməsi $n \rightarrow \infty$ şərtində ehtimala görə θ parametrinə yığılarsa, yəni kifayət qədər kiçik, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) = 1$$

bərabərliyi ödənilirsə, onda ona θ parametrinin əsaslı qiymətləndirməsi deyilir.

Əsaslılıq xassəsi n artdıqca θ_n^* statistikasının paylanması θ parametrinin kifayət qədər kiçik ətrafında yerləşdiyini göstərir və θ_n^* statistikasi üçün böyük ədədlər qanununu ifadə edir. Məsələn, əlamətin p hissəsinin qiymətləndirilməsi olaraq $\theta^* = \frac{m}{n}$

statistikasını götürdükdə $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) = 1$ münasibəti Bernulli teoreminə, baş yığının m naməlum riyazi gözləməsi olaraq seçmə ortanı götürdükdə isə Çebişev teoreminə çevrilir.

Tərif 5. $\theta_n^{(1)}$ və $\theta_n^{(2)}$ qiymətləndirmələri üçün

$$M(\theta_n^{(1)} - \theta)^2 < M(\theta_n^{(2)} - \theta)^2$$

bərabərliyi ödənildikdə, $\theta_n^{(1)}$ qiymətləndirilməsi $\theta_n^{(2)}$ qiymətləndirməsinə nisbətən daha effektiv qiymətləndirmə adlanır.

Yerinidəyişməyən qiymətləndirmələr üçün $M(\theta_n^{(1)} - \theta)^2 < M(\theta_n^{(2)} - \theta)^2$ bərabərsizliyi $D\theta_n^{(1)} < D\theta_n^{(2)}$ bərabərsizliyinə çevrilir.

Effektiv qiymətləndirmə dispersiyası ən kiçik olan mümkün qiymətləndirmə olur.

$\bar{x}$ seçmə ortasının ən kiçik dispersiyaya malik xətti qiymətləndirmə olduğunu göstərək.

Tutaq ki, (a, σ^2) parametrlili X baş yığımından həcmi n olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsi alınmışdır..

Tutaq ki, $E(a) = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ a parametrinin hər hansı yerinidəyişməyən xətti qiymətləndirməsidir. Burada $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ -lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu üçün dispersiyanın məlum xassəsinə əsasən

$$DE(a) = \sigma^2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

olduğunu yaza bilərik. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $DE(a)$ -nın yeganə minimumu vardır və o, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \bar{y}_n$ olduqda alınır. Beləliklə, $\bar{x}$ seçmə ortası ən kiçik dispersiyaya malik xətti qiymətləndirmədir.

Noqtəvi qiymətləndirmələrin qurulması üsulları

Bu paraqrafda biz nöqtəvi qiymətləndirmələrin qurulması üsulları ilə, konkret olaraq əvəzetmə (anoloji), ən kiçik kvadratlar, momentlər və ən böyük həqiqətə oxşarlıq üsulları ilə tanış olacağıq.

Əvəzetmə üsulu.

Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, naməlum parametrin qiymətləndirməsi olaraq uyğun seçmə xarakteristika götürülür. Məsələn, baş yığımın naməlum riyazi gözləməsinin qiymətləndirməsi olaraq seçmə orta, dispersiya üçün seçmə dispersiya, üç tərtibli mərkəzi moment üçün üç tərtibli mərkəzi seçmə moment və s. götürülür.

Ən kiçik kvadratlar üsulu.

Bu üsula görə statistik qiymətləndirmə seçmənin elementlərinin statistik qiymətləndirmədən kənarlaşmalarının kvadratları cəminin minimumlaşdırılması şərtindən tapılır.

X baş yığımının $EX = m$ riyazi gözləməsinin ən kiçik kvadratlar üsuluna görə statistik qiymətləndirməsini tapaq.

Bu məqsədlə X baş yığımından həcmi n olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsinə götürək. Ən kiçik kvadratlar üsuluna görə naməlum m parametrinin statistik qiymətləndirilməsi

$$Y = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \rightarrow \min$$

şərtindən tapılır;

Ekstremum zəruri şərtinə əsasən

$$\frac{dY}{dm} = 2 \sum_{i=1}^n (x_i - m) = 0$$

olduğunu alırıq. Buradan isə axtarılan qiymətləndirmənin

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

seçmə orta olduğunu alırıq.

Momentlər üsulu.

Statistik qiymətləndirmələrin qurulmasının ümumi üsulunu birinci dəfə K. Pirson təklif etmişdir. Bu üsula momentlər üsulu deyilir.

Momentlər üsuluna görə seçmə momentlər baş yığımın naməlum parametrlərdən asılı olan uyğun nəzəri momentlərinə bərabər edilir. Baxılan momentlərin sayı isə naməlum parametrlərin sayına bərabər götürülür. Alınan tənliklər sistemini naməlum parametrlərə görə həll edərək axtarılan qiymətləndirməni tapırlar.

Tutaq ki, X baş yığımının $f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ sıxlıq funksiyası n sayda naməlum $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ parametrlərindən asılıdır. Baş yığımın birinci n sayda başlanğıc momentlərini təyin edək:

$$b_m(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = MX^m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) dx$$

$m=1, 2, \dots, n$.

Fərz edək ki, X baş yığımından həcmi k olan $x_1, x_2, \dots, x_k$ seçməsi alınmışdır. Uyğun seçmə momentləri tapaq

$$b_m^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^m$$

Baş yığımın b_m nəzəri momentlərini uyğun b_m^* seçmə momentlərinə bərabər götürməklə

$$\begin{cases} b_m(\theta_1, \dots, \theta_n) = b_m^* \\ m=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

tənliklər sistemini alırıq. Alınmış tənliklər sistemini naməlum $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ parametrlərinə görə həll edərək, axtarılan $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_n$ qiymətləndirmələrini tapırıq.

Məsələn, tutaq ki, X baş yığımı üstlü qanun ilə paylanmışdır. Bu halda

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0); \quad b_1(\lambda) = Mx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\bar{\sigma}_1^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{ii} = \bar{x}$$

Onda $\begin{cases} b_m(\theta_1, \dots, \theta_n) = b_m^* \\ m=1, 2, \dots, n \end{cases}$ tənliklər sistemi $\frac{1}{\lambda} = \bar{x}$ tənliyinə çevrilir. Buradan

isə $\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}}$ olduğunu alırıq. Deməli, λ parametrlərinin axtarılan qiymətləndirilməsi seçmə ortanın tərs qiymətidir.

X baş yığımı normal paylanma qanununa tabe olduqda isə

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad b_1(a, \sigma^2) = EX = a$$

$$b_2(a, \sigma^2) = DX - (EX)^2 = \sigma^2 - a^2$$

$$b_1^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i = \bar{x}, \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{ii}^2 = \sigma_c^2 - \bar{x}^2.$$

Bu halda tənliklər sistemi

$$\begin{cases} a = \bar{x} \\ \sigma^2 - a^2 = \sigma_s^2 - (\bar{x})^2 \end{cases}$$

tənliklər sisteminə çevrilir. Bu tənliklər sistemini axtarılan a və σ^2 parametrlərinə nəzərən həll etsək $a = \bar{x}$, $\sigma^2 = \sigma_s^2$ olduğunu alırıq.

Ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsulu.

Müəyyən mənada «yaxşı» qiymətləndirmələrin qurulmasının daha optimal üsulu amerika statistiki R. Fişer tərəfindən təklif edilmiş ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsuludur. Bu üsula görə verilmiş paylanmanın naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsi həmin parametrlərdən asılı funksiyanın maksimumunun axtarılması məsələsinə gətirilir.

Tutaq ki, $x_1, x_2, \dots, x_k$ sıxlıq funksiyası $p(x, \theta)$ olan baş yığımdan aparılmış həcmi n olan seçmədir. X -diskret təsadüfi kəmiyyət olduqda $p(x, \theta)$ ehtimal, kəsilməz olduqda isə paylanmanın sıxlıq funksiyasıdır. $L(\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$ funksiyasına baxılır. Bu funksiyanı R. Fişer həqiqətəoxşarlıq funksiyası adlandırmışdır.

Məlumdur ki, $L(\theta)$ əvəzinə $l_n(\theta) = \ln L(\theta)$ funksiyasına baxdıqda maksimum nöqtəsi dəyişmir. Təcrübədə adətən $L(\theta)$ əvəzinə $l_n(\theta) = \ln L(\theta)$ funksiyasından istifadə edilir. Çünki bu hesablamaları əhəmiyyətli dərəcədə sadələşdirir.

Fərz edək ki, $p(x, \theta)$ bir naməlum parametrdən asılıdır.

Bu halda $l_n(\theta)$ funksiyasının maksimumunu aşağıdakı kimi tapmaq olar.

- 1) $\frac{d \ln L}{d \theta}$ - törəməsini tapmaq.
- 2) $\frac{d \ln L}{d \theta} = 0$ şərtindən θ^* böhran nöqtəsini tapmaq.
- 3) $\left. \frac{d^2 \ln L}{d \theta^2} \right|_{\theta=\theta^*} < 0$ olduqda θ^* maksimum nöqtəsidir.

Tapılmış θ^* maksimum nöqtəsi naməlum θ parametrinin ən böyük həqiqətəoxşarlıq qiymətləndirməsi olaraq qəbul edilir

İndi isə fərz edək ki, kəsilməz X - təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası naməlum θ_1 və θ_2 parametrlərindən asılıdır. Bu halda həqiqətəoxşarlıq funksiyası naməlum θ_1 və θ_2 parametrlərinin funksiyası olacaqdır, yəni

$$L = f(x_1; \theta_1, \theta_2) \cdot f(x_2; \theta_1, \theta_2)$$

Bu halda naməlum parametrlər üçün

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

tənliklər sisteminə çevrilir.

Puasson paylanmasının naməlum λ parametrinin λ^* nöqtəvi qiymətləndirməsini quraq.

Bu halda həqiqətəoxşarlıq funksiyası

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

şəklində olar. Axırncı bərabərlikdən

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n x_i!$$

olduğunu alırıq. Həqiqətəoxşarlıq tənliklər sistemi

$$\frac{dL(\lambda)}{d\lambda} = -H + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^H x_i = 0$$

şəklinə düşər. Axırındı tənlikdən isə $\lambda^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$ olduğunu alırıq.

Beləliklə, Puasson paylanmasının λ parametrinin ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsulu ilə qurulmuş qiymətləndirilməsi seçmə ortadır.

Normal paylanmanın θ və σ^2 naməlum parametrlərinin nöqtəvi qiymətləndirilməsini tapaq.

$$L(\theta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}}$$

Axırındı bərabərliyin hər iki tərəfini loqarifmləsək

$$\ln L(\theta, \sigma^2) = -\frac{H}{2} \left(\ln 2\pi + \ln \sigma^2 \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^H (x_i - a)^2$$

olduğunu yaza bilərik. Baxılan halda həqiqətəoxşarlıq tənliklər sistemi

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\theta, \sigma^2)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^H (x_i - a) = 0 \\ \frac{\partial L(\theta, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^H (x_i - a)^2 - \frac{H}{2\sigma^2} = 0 \end{cases}$$

sisteminə çevrilər. Tənliklər sistemini həll edərək

$$a^* = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^H x_i = \bar{x}$$

$$(\sigma^2)^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2$$

olduğunu alırıq.

Göründüyü kimi, normal paylanma parametrlərinin ən böyük həqiqətəoxşarlıq qiymətləndirmələri, ən kiçik kvadratlar və momentlər üsulları ilə tapılmış qiymətləndirmələrlə üst – üstə düşür.

Ehtimalin nisbi tezliyə görə nöqtəvi qiymətləndirilməsi

Tutaq ki, aparılan asılı olmayan sınaqlarda A hadisəsinin p baş vermə ehtimalı naməlumdur. Nisbi tezliyə əsasən naməlum p parametrinin nöqtəvi qiymətləndirilməsini tapmaq tələb edilir. Naməlum p ehtimalının nöqtəvi qiymətləndirilməsi olaraq

$$w = \frac{m}{n}$$

nisbi tezliyini götürək. Burada n- aparılan sınaqların, m isə A hadisəsinin başvermə sayıdır. Elitimal nəzəriyyəsində sübut edilmişdir ki,

$$Em=np \text{ və } Dm=npq$$

Burada $q=1-p$ götürülmüşdür. Beləliklə,

$$Ew = \frac{1}{n} Em = \frac{1}{n} np = p$$

və

$$DW = \frac{1}{n^2} Dm = \frac{pq}{n}$$

olduğunu alırıq. $Ew=p$ və $\lim_{n \rightarrow \infty} DW=0$ olduğuna görə $w = \frac{m}{n}$ nisbi tezliyi naməlum p ehtimalının yerindəyişməyən və əsaslı qiymətləndirməsidir

Paylanma parametrlərinin etibarlılıq intervalı. Etibarlılıq ehtimalı

Tutaq ki, X baş yığımının $F(x, \theta)$ paylanma funksiyası naməlum θ parametrindən asılıdır. Yuxarıda bu parametrin seçmə xarakteristikalar vasitəsi ilə yerini dəyişməyən, əsaslı, effektiv və kafi mənada ən yaxşı qiymətləndirməsindən danışılmışdır. Məsələn, normal paylanmış baş yığımın naməlum riyazi gözləməsinin ən yaxşı qiymətləndirməsi seçmə ortadır. Beləliklə, naməlum riyazi gözləmə bir ədədlə - seçmə orta ilə qiymətləndirilir. Parametr üçün tapılmış təqribi qiymətlər bir ədəddən ibarət olduğu üçün onlara nöqtəvi qiymətləndirmələr deyilir. Nöqtəvi qiymətləndirmələr müəyyən təsadüfi kəmiyyətlərin xüsusi qiymətləridir və onlar qiymətləndirilməsi tələb edilən parametrlərin əsil qiymətlərindən xeyli fərqlənə bilərlər. Məhz bu səbəbə görə naməlum parametrlər üçün qiymətləndirmələrin dəqiqliyinin və etibarlılığının öyrənilməsi riyazi statistikanın mühüm məsələlərindən biridir.

Parametrlər üçün tapılmış təqribi qiymətlərin dəqiqlik və etibarlılıq məsələləri intervallı qiymətləndirmə üsulu ilə, yəni qiymətləndirmə (etibarlılıq) intervallarının qurulması vasitəsi ilə tədqiq edilir. Kiçik seçmələr üçün qiymətləndirmə intervallarının qurulması daha çox əhəmiyyət kəsb edir. Bu halda nöqtəvi qiymətləndirmə əhəmiyyətli dərəcədə təsadüfidir və ona görə də onun etibarlılığı kiçikdir.

Tutaq ki, axtarılan θ parametri üçün $\theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymətləndirilməsi tapılmışdır və $\varepsilon > 0$ kifayət qədər kiçik ixtiyari həqiqi ədəddir. θ_n qiymətləndirməsinin θ parametrinə yaxın olmasını

$$|\theta_n - \theta| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi vasitəsi ilə xarakterizə etmək olar. Aydındır ki, bu bərabərsizliyi ödəyən ε ədədi nə qədər kiçik olarsa θ_n qiymətləndirməsi də θ parametrinə bir o qədər yaxın olar. Bu isə o deməkdir ki, qiymətləndirmənin dəqiqliyini $|\theta_n - \theta| < \varepsilon$ bərabərsizliyini ödəyən ε ədədi vasitəsi ilə ölçmək olar. Bununla yanaşı, qeyd edək ki, θ_n təsadüfi kəmiyyət olduğundan $|\theta_n - \theta| < \varepsilon$ bərabərsizliyinin hökmən ödənildiyini demək olmaz. Onun ancaq müəyyən ehtimalla ödənilməsindən danışmaq olar.

Tərif. 1. θ parametrinin əsil qiymətini verilmiş $0 < \alpha < 1$ ehtimalı ilə öz daxilində saxlayan $(\theta_n - \varepsilon, \theta_n + \varepsilon)$ intervalına qiymətləndirmə (etibarlılıq) intervalı deyilir.

Bu halda:

$$P(\theta_n - \varepsilon < \theta < \theta_n + \varepsilon) = \alpha$$

bərabərliyi ödənilir. $\theta_n - \varepsilon$, $\theta_n + \varepsilon$ ədədlərinə etibarlılıq sərhədləri, α ədədinə isə etibarlılıq ehtimalı deyilir. Etibarlılıq intervalı tapılmış qiymətləndirmələrin dəqiqliyini, etibarlılıq ehtimalı isə qiymətləndirmələrin etibarlılığını xarakterizə edir.

Etibarlılıq intervalının daha ümumi tərifini də vermək olar. Uc nöqtələri $\theta_n^{(1)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ və $\theta_n^{(2)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ təsadüfi kəmiyyətləri olan və $P(\theta_n^{(1)} < \theta < \theta_n^{(2)}) = \alpha$ münasibətini ödəyən $(\theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)})$ intervalı θ parametrinin etibarlılıq intervalı adlanır. $P(\theta_n - \varepsilon < \theta < \theta_n + \varepsilon) = \alpha$ şərtinin ödənilməsi o deməkdir ki, hər birində həcmi n olan seçmə alınmış çoxlu sayda asılı olmayan sınaqlarda qurulmuş etibarlılıq intervallarından orta hesabla $\alpha \cdot 100\%$ -i naməlum θ parametrinin əsil qiymətini öz daxilində saxlayır.

Bəzi məsələlərin həllində uc nöqtələri:

$$P(\theta < \theta_2) = \alpha; \quad \Pi(\theta > \theta_1) = \alpha$$

şərtlərindən tapılan birtərəfli etibarlılıq intervallarından istifadə edilir. Bu intervallar uyğun olaraq sol tərəfli və sağ tərəfli interval adlanır.

Qiymətləndirmənin dəqiqliyini xarakterizə edən etibarlılıq intervalının uzunluğu seçmənin n həcmindən və α etibarlılıq ehtimalından asılıdır. Belə ki, seçmənin həcmi artdıqca etibarlılıq intervalının uzunluğu kiçilir, etibarlılıq ehtimalı vahidə yaxınlaşdıqca isə onun uzunluğu artır.

1 - α ədədinə əhəmiyyətlik səviyyəsi deyilir. Statistik tədqiqatlarda həll edilən məsələlərin əhəmiyyətindən və çıxarılan nəticələrin məsuliyyətindən asılı olaraq 1- α əhəmiyyətlik səviyyəsinin 0,1; 0,05 və 0,01 qiymətlərindən istifadə edilir. İctimai tədqiqatlarda isə əhəmiyyətlik səviyyəsinin 0,01 və 0,05 qiymətlərindən istifadə edilir.

Əhəmiyyətlik səviyyəsinin və beləliklə etibarlılıq ehtimalının seçilməsində riayət edilməsi vacib olan prinsipləri konkret misal üzərində izah edək. Etibarlılıq ehtimalının seçilməsi riyazi məsələ deyil və bilavasitə həll edilən problemlərin məzmununa görə təyin edilir.

Tutaq ki, iki müəssisədə keyfiyyətli məhsulun buraxılma ehtimalı $P = \alpha = 0,99$ -a bərabərdir. Deməli, keyfiyyətsiz məhsulun buraxılma ehtimalı $1 - \alpha = 0,01$ - dir. Riyazi nöqtəyi nəzərdən, yəni məlumatın xarakterilə maraqlanmadan, α ehtimalının kiçik və ya böyük olduğunu müəyyən etmək olarmı?

Tutaq ki, müəssisələrdən biri elektrik lampası, digəri isə paraşüt istehsal edir. Qəbul edək ki yüz lampadan biri zayıdır. Lampaların bir faizinin atılması, texnoloji prosesin yenidən qurulmasına nisbətən ucuz başa gələrsə bununla barışmaq olar. Ancaq yüz paraşütdən birinin zay olması çox ciddi və arzuolunmaz nəticələrə gətirib çıxarır. Beləliklə, birinci halda zay olma ehtimalı qəbul edilən, ikinci halda isə qəbul edilməzdir. Ona görə də etibarlılıq ehtimalı məsələnin məzmununa əsasən müəyyən edilməlidir.

Orta kvadratik kənarlaşma (σ) məlum olduqda naməlum riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması

Tutaq ki, normal qanunla paylanmış yığımın (və ya X təsadüfi kəmiyyətinin) dispersiyası məlum, m riyazi gözləməsi isə məlum deyildir. Naməlum m parametrinin x_1 ,

$x_2, \dots, x_n$ seçməsinin $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ orta qiyməti vasitəsi ilə qiymətləndirməsinin etibarlılıq

intervalını tapmaq lazımdır. Bunun üçün, seçməni təşkil edən $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədlərini asılı olmayan və eyni normal qanunla paylanmış $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin qiymətləri kimi qəbul edək. Onda,

$$M\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = m, \quad D\bar{X} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

olar. Ehtimal nəzəriyyəsinə görə

$$\begin{aligned} \Pi(|X - m| < \varepsilon) &= \Pi(m - \varepsilon < X < m + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{m + \varepsilon - m}{\sigma}\right) - \\ &- \Phi\left(\frac{m - \varepsilon - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

olar. Burada x əvəzinə $\bar{x}$ götürüldükdə σ^2 əvəzinə $\frac{\sigma^2}{n}$ yazılmalıdır və nəticədə:

$$P = (\bar{x} - \varepsilon < m < \bar{x} + \varepsilon) = 2\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

bərabərliyi,

$$t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$$

əvəzləməsini apardıqda isə

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t < m < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t\right) = 2\phi(t)$$

bərabərliyi alınır. Axırını bərabərlikdə $2F(t_\alpha) = \alpha$, qəbul etsək m parametrinin α etibarlılıq ehtimalına uyğun olan etibarlılıq intervalının

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

intervalı olduğunu alarıq.

Beləliklə, X baş yığımının σ orta kvadratik kənarlaşması məlum olduqda, baş yığımın naməlum riyazi gözləməsinin α etibarlılıq ehtimalına uyğun olan etibarlılıq intervalının qurulması üçün aşağıdakı qaydanı alarıq:

Qayda 1. Normal paylanmış baş yığımın σ orta kvadratik kənarlaşması məlum olduqda $\bar{x}$ seçmə ortasına görə onun naməlum m riyazi gözləməsinin etibarlılıq intervalı α etibarlılıq ehtimalı ilə

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

kimi təyin edilir.

Orta kvadratik kənarlaşma σ məlum olmadıqda naməlum riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması

Baş yığımın orta kvadratik kənarlaşması məlum olmadıqda yuxarıda alınmış qiymətləndirmələrdən istifadə etmək olmaz. Bu halda $\bar{x}$ seçmə orta və düzəldilmiş

(təshihli) $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ orta kvadratik kənarlaşma vasitəsilə təyin edilmiş

$T = \frac{(\bar{x} - m)\sqrt{n}}{s}$ təsadüfi kəmiyyətinə baxaq. Məlumdur ki, T

sərbəstlik dərəcəsi $k=n-1$ olan Styudent paylanmasına malikdir.

Styudent paylanmasının sıxlıq funksiyasının cüt funksiya olduğunu nəzərə alsaq

$$\Pi(|T| < \varepsilon) = \Pi\left(\left|\frac{(\bar{x} - m)\sqrt{n}}{s}\right| < \varepsilon\right) = 2 \int_0^{\varepsilon} c_H(T) dT$$

bərabərliyini alırıq.

Buradan,

$$\Pi\left(|\bar{x} - m| < \frac{s}{\sqrt{n}} \varepsilon\right) = 2 \int_0^{\varepsilon} c_H(T) dT$$

və ya

$$\Pi\left(\bar{x} - \varepsilon \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \varepsilon \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 2 \int_0^{\varepsilon} c_H(T) dT$$

münasibəti alınır.

Bu münasibəti

$$2 \int_0^{t_\alpha} c_H(T) dT = \alpha$$

bərabərliyindən təyin olunan t_α ədədi vasitəsi ilə $P\left(|x - m| < \frac{s}{xt_\alpha \sqrt{n}}\right) = \alpha$ və yaxud

$\Pi\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha < m < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha\right) = \alpha$ kimi yazmaq olar.

Beləliklə, baş yığımın σ^2 dispersiyası məlum olmadıqda оны naməlum m riyazi gözləməsinin α etibarlılıq intervalına uyğun olan etibarlılıq intervalının qurulması üçün aşağıdakı qaydanı alırıq.

Qayda 2. Normal paylanmış baş yığımın orta kvadratik meyli məlum olmadıqda $\bar{x}$ seçmə ortasına görə onun naməlum m riyazi gözləməsinin etibarlılıq intervalı α etibarlılıq ehtimalı ilə

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha < m < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha$$

kimi təyin edilir.

Hadisənin naməlum p ehtimalı üçün etibarlılıq intervalının qurulması

Tutaq ki, aparılan asılı olmayan sınaqlarda A hadisəsi müşahidə edilir və onun p-başvermə ehtimalı namələumdür. Nisbi tezliyə görə naməlum p ehtimalı üçün etibarlılıq intervalı quraq. Mələumdür ki, $X \in N(a, \sigma^2)$ olduqda $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ münasibəti doğrudur. n kifayət qədər böyük olduqda nisbi tezlik asimptotik normal kəmiyyətdir və

$$Ew = p, Dw = \frac{pq}{n}, \sigma_w = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_w}\right)$$

münasibətində X və a -nı uyğun olaraq w və p ilə əvəz etsək $P(|W - p| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_w}\right)$

təqribi bərabərsizliyini alarıq. $2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_w}\right) = \alpha$ işarə edək. $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$ qəbul edək, $\sigma_w = \sqrt{\frac{pq}{n}}$. Onda

axırncı təqribi bərabərliyi $P(|W - p| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 2\Phi(t) = \alpha$ şəklində yazı bilərik.

Beləliklə, α ehtimalı ilə $|W - p| < t\sqrt{\frac{pq}{n}}$

bərabərsizliyi ödənilir.

Naməlum p parametri üçün alınmış qiymətləndirmənin iki çatışmamazlığı vardır:

1) Bu qiymətləndirmə n-in böyük qiymətlərində doğrudur, bu isə qeyri müəyyən anlayışdır;

2) (3.7) bərabərsizliyinin sağ tərəfində naməlum p parametrindən asılı kəmiyyət durur.

n-in böyük qiymətlərində ikinci çatışmamazlıq p-ni w ilə əvəz etməklə aradan qaldırıla bilər.

Fərz edək ki, $w > p$. Onda

$$W - p < t\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

olar. Bərabərsizliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək ($w > p$). Onda əvvəlki bərabərsizliyə ekvivalent olan

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)p^2 - 2\left(W + \frac{t^2}{n}\right)p + w^2 < 0$$

bərabərsizliyini alarıq. Sol tərəfdəki kvadrat üçhəddlinin diskriminantı müsbətdir. Deməli, naməlum p ehtimalı üçün etibarlılıq intervalını $p_1 < p < p_2$ şəklində yazmaq olar.

Burada

$$p_1 = \frac{n}{t^2 + n} \left[w + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2} \right]$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2 + n} \left[w + \frac{t^2}{2n} + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n} \right)^2} \right]$$

Eyni nəticəyə $W > p$ olduqda da gəlmək olar.

Beləliklə, axtarılan etibarlılıq intervalı

$p_1 < p < p_2$ şəklində olar.

Müxtəlif növ seçmələr üçün seçmə xətanın tapılması

Tipik seçim. Tutaq ki, naməlum a riyazi gözləməsini qiymətləndirmək üçün baş yığım tipik qruplara ayrılmışdır. Tipik qrupların sayını s ilə işarə edək. Fərz edək ki, i -ci qrupdan həcmi n_i , $i=1,2,\dots,s$ olan seçmə alınmışdır və $\sum_{i=1}^s n_i = n$. Baş yığımın i -ci qrupundan təsadüfi qaydada seçilmiş n_i sayda element seçmədə i -ci qrupu təşkil edir. Seçmə qrupların orta qiymətlərini və dispersiyalarını uyğun olaraq $\bar{X}_i$ və $\bar{\sigma}_i^2$ ilə, tipik qruplarınkini isə $\tilde{X}_i$ və $\tilde{\sigma}_i^2$ ilə işarə edək.

Məlumdur ki, i -ci seçmə qrupun $\bar{X}_i$ ortası müvafiq tipik qrupun $\tilde{X}_i$ ortası üçün yerindəyişməyən qiymətləndirmədir, yəni $M\bar{X}_i = \tilde{X}_i$, $i=1, 2, \dots, s$. s sayda seçmə qrupdan ibarət olan seçmənin orta kəmiyyətini $\bar{X}_s$, dispersiyanı isə $\bar{\sigma}_s^2$ ilə işarə edək.

Orta qiymət haqqında teoremə əsasən

$$\bar{X}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s \bar{X}_i \cdot n_i$$

olduğunu yaza bilərik. Onda

$$M\bar{X}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s M\bar{X}_i \cdot n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot n_i$$

olar. Axıncı bərabərlikdə n_i -i müxtəlif üsullarla təyin etmək olar. Məlumdur ki, proporsional tipik seçmələr üçün

$$\frac{n_i}{n} = \frac{H_i}{H}, \quad i=1,2,\dots,s$$

Burada, H_i - i -ci tipik qrupun həcmidir və $\sum_{i=1}^s H_i = H$.

Beləliklə,

$$M\bar{X}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot \frac{H_i}{H} \cdot H = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot H_i$$

Orta qiymət haqqında teoremə görə

$$a = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot H_i$$

olduğuna yaza bilərik.

Deməli, $M\bar{X}_s = a$. Bu isə $\bar{X}_s$ -in yerindəyişməyən qiymətləndirmə olduğunu göstərir. Hər bir seçmə qrupa n_i -həcmli təkrar seçmə kimi baxsaq

$$D\bar{X}_i = \frac{\sigma_i^2}{H_i}, i=1, 2, \dots, s$$

olduğunu alırıq.

Naməlum a parametri üçün etibarlılıq intervalını qurmaq üçün $D\bar{X}_c$ -i hesablayaq:

$$D\bar{X}_c = \sum_{i=1}^c \frac{H_i^2}{H^2} D\bar{X}_i = \sum_{i=1}^c \frac{H_i^2}{H^2} \cdot \frac{\sigma_i^2}{H_i} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^c \sigma_i^2 \cdot \frac{H_i}{H}$$

Axırıncı bərabərliyin sağ tərəfi seçmə qruplar üçün orta qrup daxili dispersiyadır.

Beləliklə,

$$D\bar{X}_c = \frac{\sigma_{\text{гр.дах}}^2}{H}$$

$$P(|\bar{X} - a| < \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_x^-}\right)$$

münasibətindən istifadə etsək naməlum a parametri üçün α etibarlılığı ilə

$$\bar{X}_c - t_\alpha \frac{\sigma_{\text{гр.дах}}}{\sqrt{H}} < a < \bar{X}_c + t_\alpha \frac{\sigma_{\text{гр.дах}}}{\sqrt{H}}$$

etibarlılıq intervalını alırıq.

Təkrar olmayan seçmələrə baxıldıqda etibarlılıq intervalını qurmaq üçün axırıncı bərabərsizlikdə $\bar{x}$ -in orta xətasını $\sqrt{\frac{\sigma_{\text{гр.дах}}}{H} \left(1 - \frac{H}{H}\right)}$ ilə əvəz etmək kifayətdir.

Əlamətin variasiyasına mütənasib seçmələrdə orta xəta aşağıdakı kimi hesablanır. Təkrar seçmələr üçün

$$\Delta = \frac{1}{H} \sqrt{\sum_{i=1}^c \frac{\sigma_i^2 H_i}{H_i}}$$

Təkrar olmayan seçmələr üçün:

$$\Delta = \frac{1}{H} \sqrt{\sum_{i=1}^c \frac{\sigma_i^2 H_i}{H_i} \left(1 - \frac{H_i}{H}\right)}$$

Burada, $\sigma_i^2 - i=1, 2, \dots, s$ qrup dispersiyasıdır.

Seçmə qrupların həcmi

$$H_i = \frac{H_i \sigma_i}{\sum_{i=1}^c \sigma_i H_i}$$

kimi təyin edildikdə aparılmış tipik seçməyə optimal seçmə deyilir. Optimal seçmənin $D\bar{X}_c$ dispersiyası minimallıq xassəsinə malikdir. Baş yığımdan optimal tipik seçmə aparmaq üçün qrup dispersiyaları məlum olmalıdır.

Qeyd edək ki, tipik seçmə əlamətin hissəsini qiymətləndirmək üçün də istifadə edilə bilər.

$\bar{p}_i$ ilə i -ci seçmə qrupda əlamətə malik olanların hissəsini işarə etsək.

$$D\bar{p} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^c \bar{p}_i \cdot (1 - \bar{p}_i) \cdot \frac{H_i}{H}$$

olar. Burada, $\bar{p}$ s sayda seçmə qrupdan ibarət olan seçmənin orta kəmiyyətidir. Bu halda baş yığımnda əlamətin p hissəsi üçün etibarlılıq intervalı

$$\bar{p} - t_{\alpha} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{H}} < p < \bar{p} + t_{\alpha} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{H}}$$

Təkrar olmayan seçmələr üçün uyğun interval

$$\bar{p} - t_{\alpha} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{H} \left(1 - \frac{H}{N}\right)} < p < \bar{p} + t_{\alpha} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{H} \left(1 - \frac{H}{N}\right)}$$

şəklində olar.

Mexaniki seçim.

Bu üsulda $n_1 = n_2 = \dots = n_s$ olduğundan $\sum_{i=1}^c H_{i\mu} = c$ olar. Bu halda etibarlılıq intervalı tipik seçmədə olduğu kimi qurulur. Mexaniki seçmədə hər bir seçmə qrupda bir element olduğu üçün orta qrup daxili dispersiyanı həcmi $n=s$ olan təsadüfi seçmənin dispersiyası ilə əvəz etmək lazımdır.

$$\bar{X}_c - t_{\alpha} \frac{\sigma_c}{\sqrt{H}} < a < \bar{X}_c + t_{\alpha} \frac{\sigma_c}{\sqrt{H}}$$

Seriyali seçim.

Tutaq ki, X baş yığımının naməlum a riyazi gözləməsini qiymətləndirmək üçün seriyalı seçmə aparılmışdır. Fərz edək ki, baş yığım həcmələri eyni $H_{i\mu} = \frac{H}{s}$ ədədinə bərabər olan s sayda seriyalara ayrılmışdır. s sayda seriyadan təsadüfi təkrar seçmə üsulu ilə k sayda seriya seçək. Onda həcmi $H = kH_{i\mu} = k \frac{H}{s}$ olan təsadüfi seçmə alırıq. Seriyaların seçmə xarakteristikalarını $\bar{X}_i$ və σ_i^2 , $i=1,2,\dots,s$ ilə işarə edək. s sayda seriyadan k saydası təsadüfi qaydada seçildiyinə görə 1-ci seçmənin nəticəsinə $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_c$ qiymətlərini eyni $\frac{1}{s}$ ehtimalı ilə alan $X_{i\mu}^*$ təsadüfi kəmiyyəti kimi baxmaq olar.

Orta qiymət haqqında teoremə görə

$$a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i \cdot N_i = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \tilde{X}_i$$

olduğunu deyə bilərik.

Digər tərəfdən

$$MX_{i\mu}^* = \sum_{i=1}^c \tilde{X}_{i\mu} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^c \tilde{X}_{i\mu} = a$$

Bu halda seçmə ortanı aşağıdakı kimi göstərmək olar.

$$\bar{X}_c = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K X_{i\mu}^*$$

Onda

$$M\bar{X}_c = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \overline{MX_{i\mu}^*} = a$$

olar. Deməli, $\bar{X}_s$ baş yığının naməlum a riyazi gözləməsinin yerindəyişməyən qiymətləndirməsidir. Onun dispersiyasını hesablayaq:

$$\begin{aligned} \hat{a} = D\bar{X}_c &= \frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^K D X_i^* = \frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^K \left(\frac{1}{S} \sum_{j=1}^C (\tilde{X}_{ij} - \hat{a})^2 \right) = \\ &= \frac{1}{K} \sum_{j=1}^C (\tilde{X}_j - \hat{a})^2 = \frac{\sigma_{\text{rp.ap.}}^2}{K} \end{aligned}$$

Beləliklə, $D\bar{X}_c = \frac{\sigma_{\text{rp.ap.}}^2}{K}$ olduğunu alırıq.

$$\Pi(|\bar{X} - a| < \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\bar{X}}}\right)$$

olduğundan

$$\Pi\left(\bar{X} - T \frac{\sigma_{\text{rp.ap.}}^2}{K} < a < \bar{X} + T \frac{\sigma_{\text{rp.ap.}}^2}{K}\right) = 2\Phi(T)$$

olar. Beləliklə, α etibarlılığı ilə naməlum a riyazi gözləməsi üçün

$$\bar{X}_c - T_\alpha \frac{\sigma_{\text{rp.ap.}}^2}{\sqrt{K}} < a < \bar{X}_c + T_\alpha \frac{\sigma_{\text{rp.ap.}}^2}{\sqrt{K}}$$

etibarlılıq intervalını alırıq.

Təkrar olmayan seçmələr üçün etibarlılıq intervalı

$$\bar{X}_c - T_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_{\text{rp.ap.}}}{K} \left(1 - \frac{K}{C}\right)} < \hat{a} < \bar{X}_c + T_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_{\text{rp.ap.}}}{K} \left(1 - \frac{K}{C}\right)}$$

şəklində olar.

Seçmənin zəruri həcmnin hesablanması

Baş yığının parametrlərini qiymətləndirmək üçün seçmənin təşkili üsulu əsaslandırıldıqdan sonra, seçmə xətanın $1 - \alpha$ etibarlılıq ehtimalı ilə arzu edilən dəqiqliyini təmin etmək məqsədi ilə seçmənin zəruri həcmi müəyyən etmək lazımdır.

Seçmə ortaya əsasən naməlum riyazi gözləmənin qiymətləndirilməsində təkrar və təkrar olmayan seçmələrin zəruri həcmnin hesablanması məsələsinə baxaq.

Əvvəlcə təkrar seçmənin həcmi hesablayaq. Orta kvadratik kənarlaşma məlum olduğu halda naməlum riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalı

$$\Pi\left(\bar{X} - T_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{H}} < M < \bar{X} + T_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{H}}\right) = 2\Phi(T)$$

şəklində olar. Etibarlılıq intervalının uzunluğu $2T_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{H}}$ -ə bərabərdir. Intervalın uzunluğu

qiymətləndirilən parametrin dəqiqliyini müəyyən edir. $\Delta = T_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{H}}$ işarə edək. Onda verilmiş

Δ dəqiqliyini və α etibarlılıq ehtimalına görə tapılmış t_α -ya görə seçmənin n zəruri həcmi hesablamaq olar. Doğrudan da,

$$\Delta^2 = t_\alpha^2 \frac{\sigma^2}{H}$$

münasibətindən

$$H = \frac{T_a^2 \sigma^2}{\Delta^2}$$

olduğunu alırıq. Deməli, $H = \left[\frac{T_a^2 \sigma^2}{\Delta^2} \right] + 1$.

İndi isə orta kvadratik kənarlaşma məlum olmayan hala baxaq. Verilmiş α etibarlılıq ehtimalı ilə aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir.

$$\bar{x} - T_{\alpha, H} \frac{c}{\sqrt{H}} < M < \bar{x} + T_{\alpha, H} \frac{c}{\sqrt{H}}$$

Orta kvadratik kənarlaşma məlum olan halda olduğu kimi, seçmənin zəruri həcmnin hesablanması üçün

$$n = \left[\frac{T_{\alpha, H}^2 c^2}{\Delta^2} \right] + 1$$

düsturunu alırıq. Burada $t_{\alpha, n}$ - x və n verilənlərinə görə xüsusi cədvəldən tapılır.

s^2 isə həcmi n olan seçməyə görə hesablanmış düzəldilmiş dispersiyadır.

İndi isə fərz edək ki, seçmə orta təkrar olmayan seçməyə əsasən hesablanmışdır.

Onda

$$P(\bar{x} - T_{\alpha} \sigma_{\bar{x}} < M < \bar{x} + T_{\alpha} \sigma_{\bar{x}}) = 2\Phi(T) = \alpha$$

olar. Baş yığının dispersiyası məlum olduqda

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{H} \cdot \frac{H - 1}{H - 1}$$

Burada N baş yığının həcmidir. Bu halda seçmə xəta üçün $\Delta^2 = T_{\alpha}^2 \frac{\sigma^2}{H} \cdot \frac{H - 1}{H - 1}$ düsturunu alırıq. Axıncı münasibətdən seçmənin zəruri həcmi hesablamaq üçün

$$H = \left[\frac{H T_{\alpha}^2 \sigma^2}{(H - 1) \Delta^2 + T_{\alpha}^2 \sigma^2} \right] + 1$$

düsturunu alırıq.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H T_{\alpha}^2 \sigma^2}{(H - 1) \Delta^2 + T_{\alpha}^2 \sigma^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T_{\alpha}^2 \sigma^2}{\left(1 - \frac{1}{H}\right) \Delta^2 + \frac{T_{\alpha}^2 \sigma^2}{H}} = \frac{T_{\alpha}^2 \sigma^2}{\Delta^2}$$

olduğuna görə, $N \rightarrow \infty$ olduqda $H = \left[\frac{T_{\alpha}^2 \sigma^2}{\Delta^2} \right] + 1$ qəbul etmək olar.

Tutaq ki, verilmiş α etibarlılığı ilə uzunluğu 2Δ olan etibarlılıq intervalı qurulmuşdur. Yuxarıda deyildiyi kimi, təkrar seçmələr üçün seçmənin zəruri sayı

$$H = \left[\frac{T_{\alpha}^2 \sigma^2}{\Delta^2} \right] + 1$$

təkrar olmayan seçmə üçün isə

$$H' = \left[\frac{H T_{\alpha}^2 \sigma^2}{(H - 1) \Delta^2 + T_{\alpha}^2 \sigma^2} \right] + 1$$

düsturu ilə hesablanır. n-in ifadəsini aşağıdakı kimi çevirək: $\frac{1}{H} = \frac{\Delta^2}{T_{\alpha}^2 \sigma^2}$

olduğu üçün

$$h' = \frac{1}{\frac{H-1}{H} \cdot \frac{\Delta^2}{\tau_\alpha^2 \sigma^2} + \frac{\tau_\alpha^2 \sigma^2}{H \tau_\alpha^2 \sigma^2}} = \frac{1}{\frac{H-1}{H} \cdot \frac{1}{h} + \frac{1}{H}} = \frac{Hh}{H + (h+1)}$$

olduğunu alırıq. $n-1 > 0$ olduğu üçün $h' \leq \frac{Hh}{H} = h$ olduğunu alırıq.

Beləliklə, təkrar seçmənin həcmi təkrar olmayan seçmənin həcmindən kiçik deyil.

Təcrübədə tez- tez təsadüf edilən hallar üçün seçmənin zəruri sayının hesablanması ifadəsini aşağıdakı cədvəldə verək.

Cədvəl 1.

Müxtəlif növ seçmələr üçün seçmənin zəruri sayının hesablanması

Seçmənin növü	Seçmənin növü	
	Təkrar	Təkrar olmayan
Təsadüfi və mexaniki	$h = \frac{\tau_\alpha^2 \sigma^2}{\Delta^2}$	$\frac{H \tau_\alpha^2 \sigma^2}{(H-1)\Delta^2 + \tau_\alpha^2 \sigma^2}$
Tipik	$h = \frac{\tau_\alpha^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2}{\Delta^2}$	$h = \frac{\tau_\alpha^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2 \cdot C}{\Delta^2 \cdot c + \tau_\alpha^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2}$
Seriyalı	$p = \frac{\tau_\alpha^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2 \cdot c}{\Delta^2}$	$p = \frac{\tau_\alpha^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2 \cdot c}{\Delta^2 \cdot c + \tau_\alpha^2 \sigma_{\text{гр.дах.}}^2}$

Bölmə 11. Statistik hipotezlərin yoxlanması.

Statistik hipotezlər haqqında ümumi anlayış

Hipotez termini yunancadan (hypothesis) tərcümədə fərziyyə, güman, təxmin və ya ehtimal mənasını bildirir.

Hipotezlər adətən müəyyən faktların müşahidəsinə əsasən irəli sürülür və həmin faktların ümumiləşdirilməsi cəhdidir.

İrəli sürülən hipotezin doğruluğunun təsdiqi və yaxud onun rədd edilməsi adətən hipotezin irəli sürülməsindən dərhal sonra baş vermir. Çox vaxt hipotezin yaranmasından onun sübutuna qədər kifayət qədər uzun zaman keçir. Məsələn, kainatın mənşəyi haqqında elmi hipotez indiyə kimi yoxlanmamışdır. Kopernikin günəş sistemi haqqında təlimi isə yarandığı dövrdən keçən üç yüz il ərzində yalnız hipotez olaraq qalmışdır. Yalnız XIX əsrin ortalarında Leverye və Hallenin cəhdləri sayəsində bu hipotezin doğruluğu sübut olunmuşdur. Bəzən hipotezin yoxlanılması kiçik zaman kəsiyində mümkün olur. Məsələn, 1846-cı ildə məşhur fransız astronomu Leverye Uran planetinin tədqiqinə əsaslanaraq naməlum planetin mövcud olması haqqında hipotez irəli sürmüşdür. O, Neptun adlandırılan bu planetin orbitini hesablayaraq onun yerini göstərdi. Elə həmin il Leveryenin hipotezi təsdiq edildi. Bu planeti Alman astronomu Halle kəşf etdi.

Deyilənləri nəzərə alaraq hipotez anlayışına tərif verək. Sözün geniş mənasında hipotez dedikdə, müəyyən hadisələr toplusunu izah edən inkişaf qanunauyğunluqları haqqında elmi cəhətdən əsaslandırılmış güman (təxmin) başa düşülür. Bunu isə yoxlamaq və sübut etmək tələb edilir.

İrəli sürülən hipotezin yoxlanılması tədqiqatın məqsədlərinə uyğun olaraq xüsusi təşkil edilmiş elmi müşahidə və ya eksperiment nəticəsində əldə edilmiş faktların köməyi ilə mümkün bilər. Bunun üçün aparılmış eksperimentin və ya tədqiqatın nəticələri haqqında kütləvi məlumatlara malik olmaq lazımdır. Həmin kütləvi məlumatların kəmiyyətə ifadəsi təsadüfi kəmiyyətlərlə xarakterizə edilir.

Qeyri-müəyyənlik şəraitində müşahidə edilən təsadüfi kəmiyyətlərə görə, nəzəri gümanın doğruluğunun yoxlanması statistik hipotezlərin köməyi ilə aparıla bilər. Təsadüfi kəmiyyətlərin və ya baş yığımların paylanma qanunları haqqında irəli sürülən təklif statistik hipotez adlanır.

Statistik hipotez elmi hipotezin xüsusi halıdır. O, elmi hipotez anlayışına nisbətən məhdud anlayışdır.

Belə ki, Marsda canlı materiyanın mövcud olması hipotezi elmi hipotezdir. Lakin statistik deyil. Çünki hər hansı statistik yığma heç bir aidiyyəti yoxdur. Eyni zamanda "Bitkiçilik məhsulları istehsalı ilə məşğul olan fermer təsərrüfatlarında rentabellik səviyyəsi heyvandarlıq məhsulları istehsal edən fermer təsərrüfatlarına nisbətən yüksəkdir" hipotezi statistikdir. Ona görə ki, bu halda orta rentabellik səviyyəsinə təsərrüfatlar yığımına nəzərən təsadüfi kəmiyyət kimi baxılır və o, paylanmanın parametri kimi qəbul edilir.

"Azərbaycan Respublikasında əhəlinin əmək haqqının həcminə görə paylanması loqarifmik normal qanuna tabedir" hipotezi də həmçinin statistikdir.

Təcrübədə tez-tez sınaqların, müşahidələrin və s. nəticələrinə əsasən konkret kütləvi hadisənin xarakteristikaları haqqında müxtəlif hipotezləri yoxlamaq tələb olunur.

Statistik hipotezlərin yoxlanılması metodları təcrübədə geniş tətbiq edilir. Məsələn, müəssisələrin əmək məhsuldarlığına görə planı yerinə yetirmələrinə nəzarət, kənd təsərrüfatı bitkilərinin məhsuldarlıqlarının müqayisəsi, istehsal edilən məhsulun keyfiyyəti və s. statistik hipotezlərin yoxlanılmasına əsaslanır.

Təqdim edilən baş yığımın (və ya X təsadüfi kəmiyyətinin) paylanma parametrləri bəzən məlum olmur. Lakin aparılan müşahidələrə və başqa məlumatlara əsasən bu paylanmanın a parametrinin müəyyən a_0 ədədinə bərabər olması, a_0 - dan böyük və ya kiçik qiymətlər alması və s. haqqında müəyyən hipotezlər söyləmək olar. Ola da bilər ki, baş yığımın paylanma funksiyasının növü müəyyən deyil, ancaq aparılan müşahidələrə əsasən onun paylanma funksiyasının növü haqqında müəyyən hipotezlər söyləmək mümkün olur.

Tərif 1. Baş yığımın paylanma parametrləri və yaxud paylanma funksiyasının növü haqqında hipotezlərə statistik hipotezlər deyilir.

Məsələn, " X baş yığımı normal qanunla paylanmışdır", "Paylanmanın parametri a_0 qiymətinə bərabərdir: $a = a_0$ ", " X və Y baş yığımlarının dispersiyaları müxtəlifdir" və s. statistik hipotezlərdir.

Statistik hipotezlərin yoxlanılmasının əsas anlayışları

Statistik hipotezlər. Əsas və alternativ, sadə və mürəkkəb hipotezlər.

Statistik hipotezlər empirik nəticələr və ya seçmə yığım vasitəsilə yoxlanılır. Bu məqsədlə, müəyyən bir qayda ilə sınağın $x_1, x_2, \dots, x_n$ nəticələrinin baş yığımın paylanma parametrləri və yaxud onun paylanma funksiyasının növü haqqında hipotez ilə uzlaşdığı və yaxud onlar arasındakı fərqi təsadüfi seçim mexanizmi ilə bağlı olan təsadüfi xəta ilə əlaqədar olduğu yoxlanılır. Həmin qaydaya, yəni irəli sürülən fərziyyənin qəbul və ya rədd edilməsini göstərən qaydaya uzlaşma kriteriyası deyilir.

Statistik hipotezlərin yoxlanılmasının əsas anlayışları ilə tanış olaq.

İrəli sürülən hər bir başlanğıc hipotezə əsas (sıfırıncı) hipotez deyilir. Əsas hipotez H_0 kimi işarə edilir.

Əsas hipotezə zidd olan hər bir hipotezə alternativ (rəqib) hipotez deyilir. Alternativ hipotezi H_1 kimi işarə edilir.

Hipotezləri riyazi olaraq təsvir etmək üçün hipotezin işarəsindən sonra iki nöqtə (:) qoyulur və ondan sonra hipotezin məzmunu yazılır. Məsələn, normal paylanmış baş yığımın riyazi gözləməsi a ədədinə bərabərdir əsas hipotezi $H_0: MX = a$ kimi, “ X -baş yığımı normal paylanmaya malik deyil” alternativ hipotezi isə H_1 : “ X -normal paylanmaya malik deyil” kimi yazılır.

Hipotezlər sadə və mürəkkəb olur.

Seçmə yığımın paylanmasını birqiymətli olaraq təyin edən hipotezə sadə deyilir.

Məsələn, 1-ci məsələdəki hipotezlər sadədir. Çünki burada 2 hal mümkündür: $p=0,1$ peyvənd edilməyib; $p=0,05$ peyvənd edilmişdir. Göründüyü kimi, paylanma parametrlərinin konkret ədədə bərabər olması haqqında hipotez yoxlanılır, yəni təsadüfi kəmiyyətin paylanması tamamilə müəyyəndir.

Sadə olmayan hipotezlərə mürəkkəb hipotezlər deyilir. Mürəkkəb hipotezlərdə parametrlərin ehtimal edilən qiymətlər çoxluğu verilir. 2-ci məsələdəki alternativ hipotezi $H_1: b > a$ şəklində yaza bilərik. Bu mürəkkəb hipotezdir. Çünki, b parametri a -dan böyük istənilən qiyməti ala bilər. Mürəkkəb hipotezlər sonlu və ya sonsuz sayda sadə hipotezlərdən ibarətdir. Məsələn, $H_1: b > a$ hipotezi, sonsuz sayda sadə $b = b_k$ (b_k a -dan böyük istənilən ədəddir) hipotezlərindən ibarətdir.

Statistik kriteriyalar. Kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti.

Seçmə məlumatların yoxlanılan hipotez ilə uzlaşması haqqında mülahizə tədqiqat üçün götürülmüş kriteriyaya görə söylənilir. Belə ki, seçilmiş kriteriyaya görə əsas hipotez qəbul edilir və yaxud rədd edilir. Başqa sözlə kriteriya əsas hipotezin qəbul və ya rədd edilməsi qaydasıdır. Adətən kriteriya olaraq seçməyə əsasən təyin edilən statistik xarakteristika götürülür. Beləliklə, kriteriya paylanma funksiyası dəqiq və ya təqribi olaraq məlum olan təsadüfi kəmiyyətdir.

İki dispersiyanın bərabərliyi və yaxud iki orta qiymətin bərabərliyi haqqında əsas hipotezin doğruluğunu yoxlamaq üçün kriteriyanı uyğun olaraq dispersiyaların nisbəti və seçmə ortaların fərqi kimi götürə bilərik.

Əsas hipotezi yoxlamaq üçün kriteriyanı müxtəlif üsullarla təyin etmək olar. Məsələn, baş yığımın riyazi gözləməsinin verilmiş a ədədinə bərabər olması haqqında $H_0: MX = a$ əsas hipotezi yoxlamaq lazımdır. X baş yığımından həcmi n olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsinə götürək. Əsas hipotezin doğruluğunu yoxlamaq üçün kriteriya olaraq $\theta_1 = \bar{X}$ seçmə ortasını, $\theta_2 = \bar{X} - a$ fərqlərini və yaxud $\theta_3 = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$ normallaşdırılmış fərqlərini götürmək olar. Belə təyin olunan təsadüfi kəmiyyətlər vasitəsilə müxtəlif uzlaşma kriteriyaları alınır.

Seçilmiş kriteriyanın seçməyə əsasən hesablanmış qiymətinə onun müşahidə edilmiş qiyməti deyilir. Məsələn tutaq ki, X baş yığımının orta kvadratik meyli $\sigma = 0.5$ məlumdur. $H_0: EX = 15$ əsas hipotezinin doğruluğunu yoxlamaq üçün həcmi $n=100$ olan seçməyə əsasən $\bar{x} = 16$ seçmə ortası tapılmışdır. Onda kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti

$$\theta_3 = \frac{(16 - 15)\sqrt{100}}{0.5} = 20$$

olar.

Kriteriyanın böhran və qəbul oblastları. Böhran nöqtələri və onların təyini.

Tutaq ki, əsas hipotezi yoxlamaq üçün θ kriteriyası seçilmişdir. Seçilmiş kriteriyaya uyğun olaraq təsadüfi kəmiyyətin qiymətlər oblastı kəsişməyən iki oblasta ayrılır: böhran və hipotezin qəbul olunma (yol verilən) oblastına.

Kriteriyanın qiymətlər çoxluğunun elə S alt çoxluğuna böhran oblastı deyilir ki, kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti bu oblasta daxil olduqda əsas hipotez rədd edilir. Əksinə kriteriyanın qəbul oblastı onun qiymətlər çoxluğunun elə alt çoxluğuna deyilir ki, kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti bu oblasta daxil olduqda əsas hipotez qəbul edilir.

Kriteriya bir ölçülü təsadüfi kəmiyyət olduğu üçün onun qiymətlər oblastı müəyyən intervala daxildir. Ona görə də böhran və kriteriyanın yol verilə bilən qiymətlər oblastları da müəyyən intervallardır. Deməli, onları bir-birindən ayıran nöqtələr vardır.

Kriteriyanın böhran oblastını onun qəbul oblastından ayıran nöqtələrə böhran nöqtələri deyilir.

Böhran oblastları birtərəfli (sol və sağ tərəfli) və ikitərəfli oblastlara ayrılır.

$\theta > z_{böh}$, $z_{böh} > 0$ bərabərsizliyi ilə təyin edilən oblasta sağ tərəfli, $\theta < z_{böh}$, $z_{böh} < 0$ bərabərsizliyi ilə təyin edilən oblasta sol tərəfli və $\theta < z_1, \theta > z_2$ ($z_2 > z_1$) -bərabərsizlikləri ilə təyin edilən oblasta ikitərəfli böhran oblastı deyilir.

Xüsusi halda ikitərəfli simmetrik böhran oblastı $|\theta| > z_{böh}$ bərabərsizliyi ilə təyin edilir.

İndi isə böhran nöqtələrinin və beləliklə, böhran oblastının təyini ilə tanış olaq.

Böhran nöqtələrinin təyini ehtimalı kifayət qədər kiçik olan hadisələrin praktiki cəhətdən mümkün olmaması prinsipinə əsaslanır. $P(\theta \in S) = \alpha$ hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər kiçik olduğu üçün o, praktiki olaraq mümkün olmayan hadisədir. Onun başverməsinə, yəni $\theta \in S$ olmasını əsas hipotezin yalan olması ilə izah etmək olar. Bu halda əsas hipotez rədd edilir. Beləliklə, $P(\theta \in S) = \alpha$ şərti kriteriyanın elə qiymətlərini müəyyən edir ki, bu qiymətlərdə əsas hipotez rədd edilir, onlar isə böhran oblastını təşkil edirlər. Ona

görə də böhran nöqtəsini tapmaq üçün əhəmiyyətlik səviyyəsi adlanan kifayət qədər kiçik α ədədi götürülür və böhran nöqtəsi əsas hipotezin doğruluğu şərtində $P(\theta \in S) = \alpha$ şərtindən tapılır.

Sağtərəfli böhran oblastı qurmaq üçün əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehtimalının əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən istifadə edilir.

$$P(Z > z_{b\ddot{o}h}) = \alpha$$

$$\text{Aydındır ki, } P(0 < Z < z_{b\ddot{o}h}) + P(Z > z_{b\ddot{o}h}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Buradan} \quad \Phi(z_{b\ddot{o}h}) + \alpha = \frac{1}{2}$$

və yaxud

$$\Phi(z_{b\ddot{o}h}) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$$

Beləliklə, sağtərəfli böhran nöqtəsi $\Phi(z_{\delta}) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$ bərabərliyindən tapılır.

Sağtərəfli böhran oblastı $Z > z_{b\ddot{o}h}$, kriteriyanın qəbul oblastı isə $Z < z_{b\ddot{o}h}$ bərabərsizliyi ilə təyin edilir.

İkitərəfli böhran oblastı qurmaq üçün əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehtimalının əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən istifadə edilir.

$$P(Z < z_{sol.b\ddot{o}h}) = \frac{\alpha}{2},$$

$$P(Z > z_{sağ.b\ddot{o}h}) = \frac{\alpha}{2}$$

Z - normal təsadüfi təsadüfi kəmiyyət olduğu üçün onun paylanması sıfır nəzərən simmetrikdir. Onda böhran nöqtələri də sıfır nəzərən simmetrikdirlər.

Beləliklə, ikitərəfli böhran oblastını və kriteriyanın qəbul oblastını qurmaq üçün sağtərəfli böhran nöqtəsini tapmaq kifayətdir. Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki,

$$P(0 < Z < z) = \Phi(z)$$

Z -in paylanması sıfır nəzərən simmetrik olduğu üçün onun $(0, \infty)$ intervalına düşməsi hadisəsinin ehtimalı $\frac{1}{2}$ olar. Onda ehtimalların toplanması qanununa görə

$$P(0 < Z < z_{b\ddot{o}h}) + P(Z > z_{b\ddot{o}h}) = \frac{1}{2}$$

Deməli ,

$$\Phi(z_{b\ddot{o}h}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Beləliklə,} \quad \Phi(z_{b\ddot{o}h}) = \frac{1 - \alpha}{2}$$

İkitərəfli böhran oblastı $|Z| > z_{b\ddot{o}h}$, kriteriyanın qəbul oblastı isə $|Z| < z_{b\ddot{o}h}$ bərabərsizliyi ilə təyin edilir.

Soltərəfli böhran nöqtəsi $P(Z > z_{böh}) = \alpha$, $z_{böh} > 0$ şərtindən tapılan sağtərəfli böhran nöqtəsinə simmetrikdir. Soltərəfli böhran nöqtəsinə tapmaq üçün əvvəlcə $\Phi(z_\delta) = \frac{1-2\alpha}{2}$ bərabərliyindən z_δ tapılır və soltərəfli böhran nöqtəsi $-z_\delta$ götürülür.

Soltərəfli böhran oblastı $Z < z_{böh}$, kriteriyanın qəbul oblastı isə $Z > z_{böh}$ bərabərsizliyi ilə təyin edilir.

Hər bir kriteriyanın böhran nöqtələri cədvəli işlənib hazırlanmışdır.

Böhran nöqtəsi tapıldıqdan sonra kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti hesablanır. $\theta \in S$ olarsa, onda H_0 əsas hipotezi rədd edilir. Əks halda onu rədd etməyə heç bir əsas yoxdur.

Birinci və ikinci növ səhvlər. Kriteriyanın gücü.

Təsadüfi seçmə sonlu olduğundan və real vəziyyəti tam əks etdirə bilmədiyindən statistik hipotezin onun vasitəsilə yoxlanılması zamanı səhv qərar qəbul olunması istisna edilmir. Əlavə seçmə ola bilsin ki, “uğurlu” olmasın və onun əsasında əldə olunacaq məlumat yalan olsun. Bu xüsusiyyət statistik yoxlamanın əhəmiyyətini azaltmır, əksinə, hipotezlərin statistik yoxlanılması imkan verir ki, səhv qərarın qəbul olunması ehtimalını hesablamaq mümkün olsun və bu ehtimal nə qədər kiçik olsa, onda qurulan kriteriya səhvə yol verməni azaldır.

Yuxarıda deyilənlərdən aydın olur ki, hipotezlərin yoxlanılması müəyyən ehtimalla səhv qərarın qəbul edilməsi ilə əlaqədardır. Statistik hipotezlər yoxlanılan zaman iki növ səhv buraxıla bilər. Əgər əsas hipotezin doğruluğu şərtində onun rədd edilməsi haqqında qərar qəbul edilirsə, onda buraxılan bu cür səhvə, birinci növ səhv deyilir. Başqa sözlə, birinci növ səhv doğru olan əsas hipotezin rədd edilməsidir. Belə səhvlər $\alpha = P_{H_0}(\theta \in S)$ ehtimalı ilə xarakterizə edilir. Alternativ hipotezin doğruluğu şərtində əsas fərziyyə qəbul edildikdə də səhv buraxılır. Bu cür səhvə ikinci növ səhv deyilir. İkinci növ səhvin buraxılması doğru olmayan hipotezin qəbul edilməsidir. İkinci növ səhvlər $\beta = P_{H_1}(\theta \in \bar{S})$ ehtimalı ilə xarakterizə edilir.

Aydındır ki, düzgün qərar iki halda ola bilər.

Cədvəl 1.

Birinci və ikinci növ səhvlərin yaranma şərtləri

Hipotezin yoxlanılmasının nəticələri	Yoxlanılan hipotezin mümkün halları	
	H_0 hipotezi doğrudur	H_1 hipotezi doğrudur
Hipotez rədd edilir	Birinci növ səhv	Düzgün qərar
Hipotez qəbul edilir	Düzgün qərar	İkinci növ səhv

Birinci növ səhvin buraxılma ehtimalına əhəmiyyətlik səviyyəsi deyilir .Başqa sözlə, əhəmiyyətlik səviyyəsi doğru olan əsas hipotezin rədd edilmə ehtimalıdır:
 $\alpha = P_{H_0}(\theta \in S) = P_{H_0}(\bar{H}_0)$

Praktiki məsələlərin həllində α əhəmiyyətlik səviyyəsinin 0,1; 0,05; 0,01; 0,001 qiymətlərindən istifadə edilir. İqtisadi tədqiqatlarda əhəmiyyətlik səviyyəsinin 0,05 və 0,01 standart səviyyələrindən istifadə edilir.

Əhəmiyyətlik səviyyəsi əvvəlcədən verilir. Əhəmiyyətlik səviyyəsinin α -ya bərabər olması o deməkdir ki, 100 haldan, 100α halda birinci növ səhv buraxıla bilər, yəni doğru olan hipotez rədd edilə bilər. α nə qədər kiçik olsa belə θ -nın S oblastına düşməsi hadisəsinin kifayət qədər kiçik ehtimallı olmasına baxmayaraq, o mümkün olmayan hadisə deyil. Ona görə də H_0 əsas hipotezinin doğruluğu şərtində θ -nin qiyməti S oblastına düşə bilər. Bu halda H_0 hipotezini rədd edərək, biz ehtimalı α əhəmiyyətlik səviyyəsi ilə ölçülən birinci növ səhvə yol veririk. α -nın kiçilməsilə birinci növ səhvin buraxılma ehtimalı kiçilir və böhran oblastı daralır. Beləliklə, əsas hipotez doğru olmadıqda belə, θ -nın müşahidə edilən qiymətinin böhran oblastına düşməsi az ehtimallı olur. $\alpha=0$ olduqda isə kriteriyanın müşahidə edilən qiymətindən asılı olmayaraq əsas hipotez həmişə qəbul ediləcəkdir. Ona görə də α -nın kiçildilməsi ikinci növ səhvə, yəni doğru olmayan hipotezin qəbul edilməsi hadisəsinin ehtimalının artırılmasına gətirib çıxarır. Bu mənada, birinci və ikinci növ səhvlər rəqibdir.

Əksər hallarda göstərilən səhvlərin nəticələri eyni deyildir. Belə ki, səhvlərdən biri daha ehtiyatlı qərarın, digəri isə heç bir əsası olmayan qərarın qəbul edilməsinə gətirib çıxarır. Hansı növ səhvin buraxılmasının “yaxşı” və ya “pis” olması məsələnin konkret qoyuluşundan və əsas fərziyyənin məzmunundan asılıdır. Məsələn, əgər məhsulun keyfiyyəti haqqında əsas fərziyyə yoxlanırsa və birinci növ səhv buraxılıbsa bu zaman yararlı məhsul qüsurlu məhsul kimi qəbul edilir. Əksinə ikinci növ səhv buraxılıbsa, biz istehlakçılara qüsurlu məhsul göndəririk. Göründüyü kimi, bu halda ikinci növ səhvin nəticəsi daha ciddi əhəmiyyət kəsb edir.

Hər iki səhvi aradan qaldırmaq mümkün olmadığına görə hər bir konkret məsələdə bu səhvlərdən irəli gələn itkini minimallaşdırmağa çalışırlar. Əlbəttə, yaxşı olar ki, eyni zamanda hər iki səhvin buraxılma ehtimalı kiçik olsun, lakin onlar rəqib olduğuna görə səhvlərdən birinin buraxılma ehtimalının kiçildilməsi, digər səhvin buraxılma ehtimalını artırır. Ona görə də hər bir konkret halda kompromis qərar çıxarmaq lazımdır. Əksər hallarda seçmənin həcmnin artırılması eyni zamanda hər iki səhvin buraxılma ehtimalının kiçildilməsinin yeganə yoludur.

Alternativ hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın böhran oblastına düşməsi ehtimalına, yəni alternativ hipotezin doğruluğu şərtində əsas hipotezin rədd edilmə ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir.

İkinci növ səhvin buraxılma ehtimalına, yəni doğru olmayan hipotezin qəbul edilməsi ehtimalına kriteriyanın gücü deyilir və β ilə işarə edilir. “ikinci növ səhv buraxılmışdır” hadisəsinin ehtimalı β olduğundan onun tamamlayıcı olan “ikinci növ səhv buraxılmamışdır” hadisəsinin ehtimalı $1 - \beta$ olar. Buradan aydın olur ki, kriteriyanın gücü ikinci növ səhvin buraxılmaması hadisəsinin ehtimalıdır.

Kriteriyanın gücünün artması ilə ikinci növ səhvin buraxılma ehtimalı kiçilir. Deməli, kriteriyanın gücü nə qədər çox olarsa, ikinci növ səhvin buraxılma ehtimalı

bir o qədər kiçik olar. Beləliklə, əhəmiyyətlik səviyyəsi seçildikdən sonra böhran oblastı elə qurulmalıdır ki, kriteriyanın gücü maksimal olsun. Bu tələbin ödənilməsi ikinci növ səhvin buraxılma ehtimalının minimallığını təmin etməlidir.

Statistik. hipotezlərin yoxlanılmasının ümumi sxemi

İstənilən statistik hipotez yoxlanılarkən aşağıdakı mərhələlər yerinə yetirilməlidir.

1. Tədqiq edilən məsələ statistik hipotez şəklində düzəst ifadə edilməlidir.

2. Əsas və alternativ hipotez seçilməlidir. Alternativ hipotezin növü adətən tədqiq edilən məsələnin mahiyyətinə əsasən müəyyən edilir. Məsələn, məhsulun 5%-nin zay (qüsurlu) olması haqqında $H_0: p=0,05$ əsas hipotezi yoxlanılarsa, onda alternativ hipotez $H_1: p>0,05$ şəklində seçilməlidir. Çünki, qüsurlu olma faizi 5-dən kiçik olduqda, məhsul onsuz da keyfiyyətli məhsul kimi qəbul ediləcəkdir.

3. α - əhəmiyyətlik səviyyəsi müəyyən edilməlidir.

4. Əsas və alternativ hipotezin xarakterindən asılı olaraq, birtərəfli və yaxud ikitərəfli böhran oblastı seçilməlidir. Əgər mürəkkəb alternativ hipotez $H_1: \theta_1 \neq \theta_2$ şəklindədirsə, bizi öyrənilən θ parametrinin θ_1 -dən hər iki tərəfə kənarlaşması maraqlandırdığına görə $\theta < \theta_1$ və $\theta > \theta_2$ ikitərəfli böhran oblastı qurulur. Alternativ hipotez $H_1: \theta < \theta_1$ şəklində olduqda sol tərəfli, $H_1: \theta > \theta_2$ olduqda isə sağ tərəfli böhran oblastı seçilir.

5. Qiymətlərinə əsasən hipotezin doğruluğu haqqında fikir söyləmək mümkün olan statistika seçilir. Statistika olaraq seçmənin elementlərindən asılı olan istənilən funksiya götürmək olar. Göründüyü kimi, hər hansı bir hipotezi yoxlamaq üçün müxtəlif statistikalar seçmək olar. Seçilmiş statistikanın hipotezin yoxlanılması kriteriyası kimi qəbul edilməsi üçün o bir sıra optimallıq (yerindəyişməzlik, əsaslılıq və effektivlik) şərtlərini ödəməlidir.

Yerindəyişməzlik xassəsi əsas hipotezin qəbul oblastının simmetrikliliyini təmin edir. Əsaslılıq xassəsi paylanmanın mərkəz ətrafında daha yığcamlılığını təmin edir. Bu isə verilmiş α əhəmiyyətlik səviyyəsində ikinci növ səhvin buraxılma ehtimalını kiçildir. Effektivlik xassəsi digər bərabər şərtlər daxilində birinci və ikinci növ səhvin ehtimalının kiçildilməsinə imkan verir.

6. Seçilmiş kriteriyanın paylanma qanunu müəyyən edilməlidir. Qeyd edək ki, bu mərhələ riyazi cəhətdən hipotezlərin yoxlanılmasında ən çətin mərhələdir.

7. Kriteriyanın məlum paylanma qanununa əsasən böhran oblastının növünə uyğun olaraq müvafiq tənliklərindən böhran nöqtələri tapılmalıdır.

8. Həcmi nəzərdə tutulan seçmə götürülməli və ona əsasən kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti hesablanmalıdır.

9. Statistik hipotezin yoxlanılması qaydası ifadə edilir və bu qaydaya əsasən statistik qərar qəbul edilir. Belə ki, əgər kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti böhran oblastına düşürsə, onda əsas hipotez seçmə məlumatlarla ziddiyyət təşkil edir və ona görə də rədd edilir. Kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti qəbul oblastına düşdükdə isə əsas hipotez qəbul edilir. Çünki, o seçmə məlumatlarla ziddiyyət təşkil etmir.

Qeyd edək ki, yoxlanılan hər bir hipotez üçün uyğun kriteriyalar işlənilib hazırlanmışdır.

Kriteriyanın qurulması üçün ən çox normal, Styudent, Fişer- Snedekor və Pirson statistikalarından istifadə edilir.

Əlamətin hissəsi haqqında hipotezlərin yoxlanması. Əlamətin hissəsinin standartla müqayisəsi.

Tutaq ki, hər hansı əlamətin r hissəsinin baş yığımnda müəyyən a kəmiyyətinə bərabər olması haqqında $H_0: p = p_0$ əsas hipotezini yoxlamaq lazımdır. Alternativ hipotezi $H_1: p \neq p_0$ şəkilində qəbul edək. Əsas hipotezi yoxlamaq üçün baş yığımdan həcmi n olan seçmə götürək. Tutaq ki, n elementdən s_n saydası əlamətə malikdir. Onda əlamətin hissəsi

$\frac{s_n}{n}$ olar. Muavr-Laplasın inteqral teoremnə görə $\frac{s_n}{n}$ statistikasını $\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$ parametrli

asimptotik normal kəmiyyətdir. Onda $\theta = \frac{\frac{s_n}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}}$ normallaşdırılmış statistikasını $(0,1)$

parametrli asimptotik normal kəmiyyətdir.

Əsas hipotezi yoxlamaq üçün $\theta = \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}}$ statistikasından istifadə edək. Əsas hipotezin doğruluğu şərtində $\theta = \frac{s_n - p_0}{\sqrt{np_0q_0}}$ statistikasını $(0,1)$ parametrli asimptotik normal kəmiyyətdir.

Böhran oblastı ikitərəflidir. Ona görə də, verilmiş α əhəmiyyətlik səviyyəsi üçün Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən $\Phi(\theta_{b\ddot{o}h}) = \frac{1-\alpha}{2}$ münasibətindən böhran nöqtəsini tapırıq.

Beləliklə $|\theta_{mü\ddot{s}}| < \theta_{b\ddot{o}h}$ olduqda $H_0: p = p_0$ əsas hipotezi qəbul edilir, $|\theta_{mü\ddot{s}}| > \theta_{b\ddot{o}h}$ olduqda isə o rədd edilir.

İndi isə fərz edək ki, alternativ hipotez $H_1: r > a$ şəklindədir. Bu halda böhran oblastı sağtərəflidir və böhran nöqtəsi

$$\Phi(\theta_{b\ddot{o}h}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

şərtindən tapılır. Beləliklə $\theta_{mü\ddot{s}} < \theta_{b\ddot{o}h}$ olduqda H_0 hipotezi qəbul edilir, $\theta_{mü\ddot{s}} > \theta_{b\ddot{o}h}$ olduqda isə rədd edilir.

Alternativ hipotez $H_1: p < a$ şəklində olduqda $\Phi(z) = \frac{1-\alpha}{2}$ şərtindən $z_\alpha = z_{sağ.b\ddot{o}h}$ sağtərəfli böhran nöqtəsi tapılır və $z_{sol.bu} = -z_{sağ.b\ddot{o}h}$ qəbul edilir.

$\theta_{mü\ddot{s}} > -\theta_{b\ddot{o}h}$ olduqda əsas hipotezi rədd etməyə heç bir əsas yoxdur. $\theta_{mü\ddot{s}} < -\theta_{b\ddot{o}h}$ olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.

İki yığışda əlamətin hissələri haqqında hipotezin yoxlanılması.

Tutaq ki, birinci yığışdan həcmi n , ikinci yığışdan isə həcmi m olan seçmə alınmışdır və n elementdən s_n -i, m elementdən isə s_m -i əlamətə malikdir. Onda birinci yığışda əlamətin başvermə tezliyi $\frac{s_n}{n}$, ikinci yığışda isə $\frac{s_m}{m}$ olar.

$H_0 : p_1 = p_2 = p$, başqa sözlə "hər iki yığışa əlamətinin hissəsi p olan eyni baş yığışdan seçmə kimi baxmaq olar." əsas hipotezini yoxlamaq tələb edilir.

Əsas hipotezi seçmə tezliklər arasındakı fərqlə təsadüfi seçmə mexanizmi ilə əlaqədar olduğunu qəbul edir. Ona görə də bu cür hipotezləri əlamətin hissələri haqqında və yaxud onlar arasındakı fərqlə əhəmiyyətliyi haqqında fərziyyələr də adlandırırlar.

Əsas hipotezi yoxladıqda böyük və kiçik seçmələri fərqləndirmək lazımdır.

1. Böyük seçmələr. ($n > 30$) $\frac{s_n}{n}$ və $\frac{s_m}{m}$ statistikaları müvafiq olaraq $\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$ və $\left(p, \sqrt{\frac{pq}{m}}\right)$ parametrlə asimptotik normal paylanmaya malikdirlər. $\theta = \frac{s_n}{n} - \frac{s_m}{m}$ statistikasının riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablayaq:

$$E\theta = E\left(\frac{s_n}{n} - \frac{s_m}{m}\right) = E\frac{s_n}{n} - E\frac{s_m}{m} = p - p = 0$$

$$D\theta = D\left(\frac{s_n}{n} - \frac{s_m}{m}\right) = D\frac{s_n}{n} + D\frac{s_m}{m} = pq\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = \frac{pq(n+m)}{nm}$$

$$\theta = \frac{\left(\frac{s_n}{n} - \frac{s_m}{m}\right)\sqrt{nm}}{\sqrt{pq(n+m)}}$$

normallaşdırılmış statistika əsas hipotezin doğruluğu şərtində, yəni $p_1 = p_2 = p$ olduqda $(0,1)$ parametrlə asimptotik normal kəmiyyətdir. Naməlum p ehtimalının onun $\tilde{p} = \frac{s_n + s_m}{n + m}$ qiymətləndirməsilə əvəz edək.

$H_0 : p_1 = p_2 = p$ əsas hipotezini yoxlamaq üçün

$$\theta = \frac{\left(\frac{s_n}{n} - \frac{s_m}{m}\right)\sqrt{nm}}{\sqrt{pq(n+m)}}$$

Beləliklə, kriteriyanın müşahidə edilən qiyməti

$$\theta_{\text{müş}} = \frac{\left(\frac{s_n}{n} - \frac{s_m}{m}\right)\sqrt{nm}}{\sqrt{\frac{s_n + s_m}{n + m} \left(1 - \frac{s_n + s_m}{n + m}\right)(n + m)}}$$

olar.

Böhran oblastı ikitərəflidir. Ona görə də, verilmiş α əhəmiyyətlik səviyyəsi Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən $\Phi(\theta_{b\bar{o}h}) = \frac{1-\alpha}{2}$ münasibətindən böhran nöqtəsini tapırıq.

Beləliklə $|\theta_{m\bar{u}ş}| < \theta_{b\bar{o}h}$ olduqda $H_0: p_1 = p_2 = p$ əsas hipotezi qəbul edilir, $|\theta_{m\bar{u}ş}| > \theta_{b\bar{o}h}$ olduqda isə o rədd edilir.

İndi isə fərz edək ki, alternativ hipotez $H_1: p_1 > p_2$ şəklindədir. Bu halda böhran oblastı sağtərəflidir və böhran nöqtəsi

$$\Phi(\theta_{b\bar{o}h}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

şərtindən tapılır. Beləliklə $\theta_{m\bar{u}ş} < \theta_{b\bar{o}h}$ olduqda $H_0: p_1 = p_2 = p$ hipotezi qəbul edilir, $\theta_{m\bar{u}ş} > \theta_{b\bar{o}h}$ olduqda isə rədd edilir.

Alternativ hipotez $H_1: p_1 < p_2$ şəklində olduqda $\Phi(z) = \frac{1-\alpha}{2}$ şərtindən $z_\alpha = z_{sağ.b\bar{o}h}$ sağtərəfli böhran nöqtəsi tapılır və $z_{sol.b\bar{u}} = -z_{sağ.b\bar{o}h}$ qəbul edilir.

$\theta_{m\bar{u}ş} > -\theta_{b\bar{o}h}$ olduqda əsas hipotezi rədd etməyə heç bir əsas yoxdur. $\theta_{m\bar{u}ş} < -\theta_{b\bar{o}h}$ olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.

2. Kiçik seçmələr ($n < 30$). Aydındır ki, kiçik seçmələr üçün $\theta = \frac{\left(\frac{s_n}{n} - \frac{s_m}{m}\right)\sqrt{nm}}{\sqrt{pq(n+m)}}$

statistikasının normal paylanmaya malik olduğunu qəbul etmək olmaz. Bu halda əsas hipotezi yoxlamaq üçün “xi-kvadrat” kriteriyasından istifadə edilir. Hər iki seçmənin eyni baş yığımdan götürüldüyünü qəbul edib, $pn, (1-p)n, pm, (1-p)m$ nəzəri tezliklərini hesablayaq və p-ni onun $\tilde{p} = \frac{s_n + s_m}{n + m}$ qiymətləndirməsi ilə əvəz edək. Onda

$$\chi^2 = \frac{(s_n - pn)^2}{pn} + \frac{(n - s_n - (1-p)n)^2}{(1-p)n} + \frac{(s_m - pm)^2}{pm} + \frac{(m - s_m - (1-p)m)^2}{(1-p)m} \text{ olar.}$$

Dörd nəzəri tezlik arasında üç asılı olmayan münasibət olduğuna görə onlardan biri sərbəstdir. Bu isə o deməkdir ki, «xi-kvadrat» paylanmasının sərbəstlik dərəcəsi vahidə bərabərdir.

χ^2 -in ifadəsindən göründüyü kimi əsas hipotezin doğruluğu şərtində nəzəri və faktiki tezliklər arasındakı fərqi yalnız təsadüfi seçmə mexanizmi ilə bağlamaq olar. Verilmiş α əhəmiyyətlik səviyyəsinə və $k=1$ sərbəstlik dərəcəsinə görə “Xi-kvadrat” paylanmasının böhran nöqtələri cədvəlindən χ_{δ}^2 böhran nöqtəsini tapırıq və kriteriyanın χ_M^2 qiymətini hesablayırıq.

$\chi_M^2 > \chi_{\delta}^2$ olduqda əsas hipotez rədd edilir, $\chi_M^2 < \chi_{\delta}^2$ olduqda isə onun qəbulu haqqında qərar qəbul edirik.

Orta qiymətlər haqqında hipotezlərin yoxlanılması.

Seçmə ortanın hipotetik orta ilə müqayisəsi haqqında hipotezin yoxlanması.

Tutaq ki, X baş yığımının orta qiymətinin müəyyən bir a ədədinə bərabər olması haqqında $H_0: EX = a$ əsas hipotezini yoxlamaq lazımdır. Əsas hipotezi yoxlamaq üçün kriteriya seçərkən böyük və kiçik seçmələri fərqləndirmək lazımdır.

1. Böyük seçmələr ($n > 30$).

a) Baş yığımın dispersiyası məlumdur.

Hipotezi yoxlamaq məqsədilə X baş yığımından həcmi n olan seçmə götürək və

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ seçmə ortasını hesablayaq. Əsas hipotezi yoxlamaq üçün

$$Z = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{DX}$$

kriteriyasından istifadə edək. Aydındır ki, $Z \in N(0,1)$ olar. Tutaq ki, alternativ hipotez $H_1: EX \neq a$ şəklindədir. Bu halda böhran oblastı ikitərəflidir. Böhran nöqtələrini

$\Phi(z_{böh}) = \frac{1-\alpha}{2}$ şərtindən tapırıq

$|Z_{müs}| > z_{böh}$ olduqda əsas hipotez rədd edilir, əks halda isə onu rədd etməyə heç bir əsas yoxdur.

Alternativ hipotez $H_1: EX > a$ şəklində olduqda sağtərəfli böhran nöqtəsi

$$\Phi(z_{böh}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

şərtindən tapılır. $Z_{müs} > z_{böh}$ olduqda əsas hipotez α əhəmiyyətlik səviyyəsi ilə rədd edilir. $Z_{müs} < z_{böh}$ olduqda isə qəbul edilir. Bu isə o deməkdir əsas hipotez təjribi verilənlərlə uzlaşır, yəni seçmə ortanın ümumi ortadan kənarlaşması seçmənin təsadüfi xətlərinin nətiyəsidir.

Tutaq ki, alternativ hipotez $H_1: EX < a$ şəklindədir. Bu $\Phi(z_{böh}) = \frac{1-2\alpha}{2}$ şərtindən sağtərəfli böhran nöqtəsi tapılır və onun əksi soltərəfli böhran nöqtəsi olaraq qəbul edilir.

$Z_{müs} > z_{sol.t}$ olduqda əsas hipotez qəbul edilir. $Z_{müs} < z_{sol.t}$ olduqda isə o rədd edilir.

b) Baş yığımın dispersiyası naməlumdur.

DX məlum olmadıqda əsas hipotezin yoxlanılmasında baxılan kriteriyadan istifadə etmək olmaz. Mərkəzi limit teoreminə əsasən seçmə orta asimptotik normal paylanmaya malikdir. Ona görə də böyük n -lər üçün ($n > 30$ olduqda) DX -i onun yerindəyişməyən $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$ seçmə qiymətləndirilməsi ilə əvəz etmək olar. Bu halda kiçik seçmələr üçün

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - a)}{S}$$

statistikasından istifadə etmək daha məqsədə uyğundur. T statistikasını sərbəstlik dərəcəsi $v = n-1$ olan Student paylanmasına malikdir. Kriteriya seçildikdən sonra əsas hipotez eyni ilə DX dispersiyası məlum olan hal kimi yoxlanılır.

Orta qiymətlərin müqayisəsi haqqında hipotezin yoxlanılması **Dispersiyalar məlum olan hal.Laplas kriteriyası.**

Tutaq ki, X və Y baş yığımlardır və onların orta qiymətlərinin bərabərliyi haqqında $H_0: EX = EY$ əsas hipotezini yoxlamaq lazımdır. Əvvəlcə fərz edək ki, DX və DY dispersiyaları məlumdur. X baş yığımindan həcmi n_1 olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsinə, Y yığımindan isə həcmi n_2 olan $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ seçməsinə götürək. Baş yığımların seçmə ortalarını və seçmə dispersiyalarını uyğun olaraq $\bar{X}, s_x^2$ və $\bar{Y}, s_y^2$ kimi işarə edək.

Aydındır ki, $E\bar{X} = EX$ və $E\bar{Y} = EY$. Seçmələr asılı olmadığına görə $\bar{X}$ və $\bar{Y}$ kəmiyyətləri də asılı deyillər. Deməli,

$$D(\bar{X} - \bar{Y}) = D\bar{X} + D\bar{Y} = \frac{DX}{n_1} + \frac{DY}{n_2}$$

olar.

Əsas hipotezi yoxlamaq üçün

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{D(\bar{X} - \bar{Y})}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{DX}{n_1} + \frac{DY}{n_2}}}$$

kriteriyasından istifadə edək. Bu kriteriyaya Laplas kriteriyası deyilir. Əsas hipotezin doğruluğu şərtində $Z \in N(0;1)$ olar.

Z normal təsadüfi təsadüfi kəmiyyət olduğu üçün onun paylanması sıfır nəzərən simmetrikdir. Onda böhran nöqtələri də sıfır nəzərən simmetrikdirlər.

Beləliklə, ikitərəfli böhran oblastını və kriteriyanın qəbul oblastını qurmaq üçün sağtərəfli böhran nöqtəsini tapmaq kifayətdir. Ehtimal nəzəriyyəsiindən məlumdur ki,

$$P(0 < Z < z) = \Phi(z)$$

Z -in paylanması sıfır nəzərən simmetrik olduğu üçün onun $(0, \infty)$ intervalına düşməsi hadisəsinin ehtimalı $\frac{1}{2}$ olar. Onda ehtimalların toplanması qanununa görə

$$P(0 < Z < z_{boh}) + P(Z > z_{boh}) = \frac{1}{2}$$

Deməli ,

$$\Phi(z_{boh}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

Beləliklə,
$$\Phi(z_{boh}) = \frac{1-\alpha}{2}$$

İkitərəfli böhran oblastı $|Z| > z_{boh}$, kriteriyanın qəbul oblastı isə $|Z| < z_{boh}|$ bərabərsizliyi ilə təyin edilir.

Beləliklə, X və Y baş yığımlarının DX və DY dispersiyaları məlum olduqda $H_0: EX = EY$ hipotezini yoxlamaq üçün aşağıdakı qaydanı alırıq.

Qayda. Alternativ hipotez $H_1: EX \neq EY$ olduqda, α dəqiqlik səviyyəsinə görə Laplas funksiyası qiymətləri cədvəlindən

$$\Phi(Z_{\delta}) = \frac{1-\alpha}{2}$$

bərabərliyinə əsasən z_{δ} nöqtəsini tapırıq. $|z_M| < z_{\delta}$ olduqda əsas hipotezi qəbul edirik. $|z_M| > z_{\delta}$ olduqda isə əsas hipotezi rədd edilir.

Bu halda sağtərəfli böhran oblastı qurmaq üçün əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehtimalının əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən istifadə edilir.

$$P(Z > z_{b\delta h}) = \alpha$$

$$\text{Aydındır ki, } P(0 < Z < z_{b\delta h}) + P(Z > z_{b\delta h}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Buradan} \quad \Phi(z_{b\delta h}) + \alpha = \frac{1}{2}$$

və yaxud

$$\Phi(z_{b\delta h}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

Beləliklə, alternativ hipotez $H_1: EX > EU$ olduqda böhran nöqtəsi $\Phi(Z_{\delta}) = \frac{1-2\alpha}{2}$ bərabərliyindən tapılır.

Alternativ hipotez $H_1: EX < EU$ olduqda soltərəfli böhran oblastı qurulur. Soltərəfli böhran nöqtəsi $P(Z > z_{b\delta h}) = \alpha$, $z_{b\delta h} > 0$ şərtindən tapılan sağtərəfli böhran nöqtəsinə simmetrikdir.

Beləliklə, soltərəfli böhran nöqtəsini tapmaq üçün əvvəlcə $\Phi(Z_{\delta}) = \frac{1-2\alpha}{2}$ bərabərliyindən z_{δ} tapılır və soltərəfli böhran nöqtəsi $-z_{\delta}$ götürülür.

Dispersiyalar məlum olmayan hal. Styudent kriteriası

İndi isə X və U baş yığımlarının dispersiyaları məlum olmayan hala baxaq. Fərz edək ki, $DX = DU = \sigma^2$

Əsas hipotezi yoxlamaq üçün

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_x^2 + (n_2 - 1)S_y^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

kriteriyasından istifadə edək. Bu kriteriyanın paylanma qanunu aşağıdakı teorem vasitəsi ilə verilir.

Teorem 1. Tutaq ki, X baş yığımindan həcmi n_1 olan $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$, Y baş yığımindan isə həcmi n_2 olan $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ təsadüfə seçimi alınmışdır. Fərz edək ki, $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$;

$$\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i; \quad S_x^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2; \quad S_y^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2 \quad X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$$

Onda

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{n_1 S_x^2 + n_2 S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi $n_1 + n_2 - 2$ olan Styudent paylanmasına malikdir.

İsbatı.

$$M \frac{\bar{X} - a}{\sigma} = 0; \quad D \frac{\bar{X} - a}{\sigma} = 1$$

olduğu üçün nəticəsinə görə $\frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma} \in N(0,1)$ olar. Eyni səbəbdən $\frac{(\bar{Y} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$

olar.

Məlum teoremə görə $\frac{n_1 S_x^2}{\sigma^2}$ və $\frac{n_2 S_y^2}{\sigma^2}$

kəmiyyətləri sərbəstlik dərəcələri uyğun olaraq $n_1 - 1$ və $n_2 - 1$ olan “Xi-kvadrat” paylanmaya malikdirlər. Seçimlər asılı olmadıqları üçün

$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma} \in N\left(0; \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$ və yaxud $\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \in N(0,1)$ olar. Digər tərəfdən

$\frac{1}{\sigma^2} (n_1 S_x^2 + n_2 S_y^2)$ jəmi sərbəstlik dərəcəsi $n_1 + n_2 - 2$ olan χ^2 -paylanmaya malikdir və $\bar{X} - \bar{Y}$, $n_1 S_x^2 + n_2 S_y^2$ kəmiyyətləri asılı deyillər.

Beləliklə, Styudent paylanmasının tərifinə əsasən T kəmiyyətinin sərbəstlik dərəcəsi $n_1 + n_2 - 2$ olan Styudent paylanmasına malik olduğunu deyə bilərik.

Beləliklə α dəqiqlik səviyyəsi ilə orta qiymətlərin bərabərliyi haqqında $H_0: EX = EY$ əsas hipotezini yoxlamaq üçün aşağıdakı qaydanı alırıq.

Qayda 1. Dəqiqlik səviyyəsi α verildikdə və alternativ hipotez $H_1: EX \neq EY$ şəkilində olduqda $H_0: EX = EY$ əsas hipotezini yoxlamaq üçün kriteriyanın T_m müşahidə edilən qiymətini ytsablayırıq. İkitərəfli böhran oblastı əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehnimalının verilmiş əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən tapılır. Bu halda sol və sağtərəfli böhran nöqtələri

$$P(T < t_{sol,t}) = \frac{\alpha}{2}, P(T > t_{sağ,t}) = \frac{\alpha}{2}$$

şərtlərindən tapıldıqda kreiteriya daha güclü olur.

Styudent paylanması sıfır nəzərən simmetrik olduğu üçün sağtərəfli $t_\alpha(k)$ böhran nöqtəsini tapmaq kifayətdir.

$|T_{mü}| < t_\alpha(k)$ olduqda əsas hipotezi rədd etməyə heç bir əsas yoxdur $|T_{mü}| > t_\alpha(k)$ olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.

Qayda 2. Alternativ hipotez $H_1: EX > EU$ olduqda böhran oblastı əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın bu oblasta düşməsi ehnimalının verilmiş əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən tapılır:

$$P(T > t_{sağ,t}) = \alpha$$

tapılır. $T_{mü} < t_{sağ,t}$ olduqda əsas hipotezi qəbul edirik, $T_{mü} > t_{sağ,t}$ olduqda isə rədd edilir.

Qayda 3. Alternativ hipotez $H_1: EX < EU$ olduqda əvvəlcə qayda 2-y əsasən $t_{böh}$ tapılır və soltərəfli böhran nöqtəsi $t'_{böh} = -t_{böh}$ kimi götürülür. $T_{mü} > -t_{böh}$ olduqda əsas hipotezi rədd etməyə heç bir əsas yoxdur. $T_{mü} < -t_{böh}$ olduqda isə hipotez rədd edilir.

Orta qiymətlərin bərabərliyi haqqında əsas hipotezi Styudent kriteriyasına əsasən yoxlayarkən əvvəlcə baş yığımların dispersiyalarının bərabərliyinə əmin olmaq lazımdır. Əgər dispersiyaların müqayisəsi zamanı onların əhəmiyyətli dərəcədə fərqləndiyi aşkar olarsa, onda Styudent kriteriyasının köməyiylə orta qiymətləri müqayisə etmək olmaz. Belə ki, seçmələr dispersiyaları bərabər olan baş yığımlardan götürüldükdə Styudent paylanması ancaq sərbəstlik dərəcəsindən asılı olur. Dispersiyalar məlum olmadıqda bu paylanma sərbəstlik dərəcəsi ilə yanaşı naməlum $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ nisbətindən də asılıdır. Beləliklə

nəticənin səhvi orta qiymətlərin və dispersiyaların müqayisəsi haqqında hipotezlərin səhvlərinin mürəkkəb kombinasiyasından ibarətdir. Bu cür hallarda orta qiymətlərin bərabərliyi haqqında $H_0: EX = EY$ əsas hipotezini yoxlamaq üçün

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_1} + \frac{S_y^2}{n_2}}}$$

kriteriyasından istifadə etmək məqsədəuyğundur. T-kriteriyası sərbəstlik dərəcəsi

$$K = \frac{\left(\frac{S_x^2}{n_1} + \frac{S_y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_x^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_y^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

kimi təyin edilən Styudent paylanmasına malikdir. Qeyd edək ki, ixtiyari n_1 və n_2 üçün

$$\min(n_1 - 1; n_2 - 1) \leq k \leq n_1 + n_2 - 2$$

Əsas hipotezin yoxlanılması yuxarıdakına analogi olaraq aparılır.

Asılı seçmələr haqqında hipotezlərin yoxlanılması

Statistik hipotezlərin yoxlanılmasında elə hallara rast gəlinir ki, bu zaman müqayisə edilən seçmələrə asılı olmayan seçmələr kimi baxmaq olmaz. Məsələn, ənənəvi və yeni yem payının mal-qaranın məhsuldarlığına təsiri eyni mal-qara qrupu üzərində yoxlanıla bilər, iki növ əmtəəyə tələbat eyni mağazada öyrənilə bilər, hər bir işçinin əmək məhsuldarlığı səviyyəsi yeni texnologiyanın tətbiqindən əvvəl və sonra müəyyən edilə bilər, ana inəklərin və qız inəklərin məhsuldarlığı müqayisə edilə bilər və s. Göstərilən bu misalların hər biri asılı seçmələrin müqayisəsi haqqında fərziyyələrin yoxlanılmasına aiddir. Təbii ki, asılı olmayan seçmələr üçün əvvəlki paraqraflarda öyrənilən metodlar bu halda tətbiq edilə bilməz. Çünki, həmin metodların tətbiqi seçmələrin asılı olmamazlıq şərtinə əsaslanır. Asılı seçmələr haqqında hipotezləri yoxlamaq üçün aşağıda göstərilən kriteriyadan istifadə etmək olar.

Hər bir müşahidə obyektinə üçün iki x və y göstəricisini (məsələn, ənənəvi və yeni yem payına görə mal-qaranın məhsuldarlığını) qeyd edək. Müşahidənin nəticəsini

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$y: y_1, y_2, \dots, y_n$$

kimi işarə edək. Deməli $(x_i; y_i)$, $i=1, 2, \dots, n$ asılı cütlər ardıcılığıdır. Əgər öyrənilən amil ancaq x və ya y əlamətinə təsir edirsə, onda x_i və y_i arasında əhəmiyyətli fərq müşahidə ediləcəkdir. Bu fərqi təsadüfi kənarlaşmalar və ya öyrənilən amilin təsiri hesabına

olmasını müəyyən etmək üçün kriteriyanı seçək. $d_i = x_i - y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ işarə edək. Onda cüt müşahidələr fərqlərinin umumiləşdirici kəmiyyəti olaraq

$$d = \frac{\sum d_i}{n}$$

götürmək olar. Aydınır ki, d nə qədər kiçik olarsa müşahidələr fərqlərinin bir o qədər kiçik olması həqiqətə uyğun olar. Ona görə də əsas fərziyyəni, $H_0: d=0$

alternativ fərziyyəni isə

$$H_1^{(1)}: d < 0; \quad H_1^{(2)}: d > 0; \quad H_1^{(3)}: d \neq 0$$

şəklində götürə bilərik. Əsas hipotezi yoxlamaq üçün

$$T = \frac{d\sqrt{n}}{s} \text{ statistikasından istifadə edək. Burada}$$

$$s^2 = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}$$

düzəldilmiş dispersiyadır.

Əgər baş yığım normal paylanmaya malikdirsə əsas hipotezin doğruluğu şərtində

$$T = \frac{d\sqrt{n}}{s}$$

statistikası sərbəstlik dərəcəsi $k=n-1$ olan Styudent paylanmasına malikdir. Kriteriya təyin edildikdən sonra əsas hipotez əvvəlki paraqraflarda olduğu kimi yoxlanılır.

Dispersiyaların bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanılması. Fişer-Snedekor kriteriyası.

Təcrübədə dispersiyaların müqayisəsi haqqında hipotezlərin yoxlanılmasına tez-tez təsadüf edilir. Belə ki, ölçü cihazlarının keyfiyyəti öyrənilərkən onların dispersiyaları müqayisə edilir, yeni texnologiyanın tətbiqindən əvvəl və sonra istehsal prosesinin stabililiyi təhlil edilərkən məhsul istehsalındakı kənarlaşmalar orta kvadratik kənarlaşma ilə ölçülür. İki baş yığının hər hansı bir əlamətə görə (məsələn, iş stajına, ixtisas dərəcəsinə və s.) birincinsliyi yoxlanılarkən də dispersiyalar müqayisə edilir. Baş yığımların orta qiymətləri haqqında fərziyyələr yoxlanılarkən onların əksər hallarda eyni dispersiyaya malik olduqları qəbul edilir və s.

Tutaq ki, X və Y normal paylanmış baş yığımlardır. Onların dispersiyalarının bərabərliyini yoxlayaq. Bu məqsədlə X baş yığımından həcmi n olan $x_1, x_2, \dots, x_n$, Y baş yığımından isə həcmi m olan $y_1, y_2, \dots, y_m$ seçməsinə götürək.

Əsas hipotezi $H_0: DX = DY$, alternativ hipotezi isə $H_1: DX \neq DY$ şəklində götürək.

Əvvəlcə fərz edək ki, EX və EY orta qiymətləri məlum deyildir. Aydınır ki, əsas hipotezi uyğun

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

və

$$S_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$$

düzəldilmiş seçmə dispersiyalarının müqayisəsinə əsasən yoxlamaq olar. Belə ki, onların nisbəti vahidə yaxın olduqda dispersiyaların bərabərliyi haqqında əsas hipotezi rədd

etməyə heç bir əsas yoxdur. Bu nisbətin vahiddən əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənməsi isə əsas hipotezi rədd edilməsinə zəmin yaradır.

Ona görə də seçmə dispersiyaların nisbətinin hansı qiymətində uyğun qərarın çıxarılmasının kifayət qədər əsaslı olmasını müəyyən etmək lazımdır. Əsas hipotezi yoxlamaq üçün

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2}, \text{ burada } \frac{S_x^2}{S_y^2} > 1$$

kriteriyasından istifadə edək.

Kriteriya olaraq qəbul edilmiş $\frac{S_x^2}{S_y^2}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması aşağıdakı teorem vasitəsilə müəyyən edilir.

Teorem 1. $DX = DY = \sigma^2$ olduqda

$\frac{S_x^2}{S_y^2}$ - təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri n_1-1 və n_2-1 olan Fişer- Snedekor

paylanmasına malikdir.

İsbatı: $\frac{S_x^2}{S_y^2}$ nisbətini aşağıdakı kimi göstərək.

$$\begin{aligned} \frac{S_x^2}{S_y^2} &= \frac{(n_1-1)S_x^2}{(n_2-2)S_y^2} \cdot \frac{n_2-1}{n_1-1} = \left[\frac{(n_1-1)S_x^2}{\sigma^2} \cdot \frac{(n_2-1)S_y^2}{\sigma^2} \right] \cdot \frac{n_2-1}{n_1-1} = \\ &= \frac{\frac{(n_1-1)S_x^2}{\sigma^2}}{n_1-1} : \frac{\frac{(n_2-1)S_y^2}{\sigma^2}}{n_2-1} \end{aligned}$$

Məlumdur ki, $\frac{(n_1-1)S_x^2}{\sigma^2}$ və $\frac{(n_2-1)S_y^2}{\sigma^2}$ təsadüfi kəmiyyətləri sərbəstlik dərəcələri uyğun olaraq n_1-1 və n_2-1 olan χ^2 paylanmasına malikdirlər. Tərifə əsasən bu isə o deməkdir ki, $\frac{S_x^2}{S_y^2}$ nisbəti sərbəstlik n_1-1 və n_2-1 olan Fişer- Snedekor paylanmasına malikdir.

Bu halda böhran oblastı $F \succ F_{sağ.böh}$ və $F \prec F_{sol.böh}$ şəklindədir, böhran nöqtələri isə

$$P(F \succ F_{sağ.böh}) = \frac{\alpha}{2}, P(F \prec F_{sol.böh}) = \frac{\alpha}{2}$$

şərtlərindən tapılır. Ancaq Fişer-Snedekor paylanmasının böhran nöqtələri cədvəlində soltərəfli böhran nöqtəsi verilməmişdir. Sağtərəfli böhran nöqtəsini $P(F \succ F_{sağ.böh}) = \frac{\alpha}{2}$ şərtinən tapmaqla kriteriyanın ikitərəfli böhran oblastına düşməsinə əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər ehtimalla təmin etmək olar.

$F \succ F_{sağ.böh}$ və $F \prec F_{sol.böh}$ hadisələri uyuşmayan hadisələr olduqları üçün kriteriyanın ikitərəfli böhran oblastına düşməsi ehtimalı α -ya bərabər olar.

Beləliklə, böhran oblastı $H_1: DX \neq DY$ şəklində olduqda $F_{sağ.böh} = F\left(\frac{\alpha}{2}, n_1, n_2\right)$ böhran nöqtəsini tapmaq kifayətdir.

Yuxarıda deyilənlərə əsasən orta qiymətlər məlum olmadıqda dispersiyaların müqayisəsi üçün aşağıdakı qaydanı alırıq.

Qayda 1. Alternativ hipotez $H_1: DX \neq DY$ kriteriyasının F_m müşahidə edilən qiymətini hesablayırıq. Fişer-Snedekor paylanmasının böhran nöqtələri cədvəlindən verilmiş $\frac{\alpha}{2}$ dəqiqlik səviyyəsinə və n_1, n_2 sərbəstlik dərəcəsinə görə $F_{\delta}\left(\frac{\alpha}{2}; n_1; n_2\right)$ böhran nöqtəsini tapırıq. $F_m < F_{\delta}$ olduqda əsas hipotezi rədd etməyə əsas yoxdur. $F_m > F_{\delta}$ olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.

Alternativ hipotez $H_1: DX \succ DY$ şəklində olduqda sağtərəfli böhran oblastı əsas hipotezin doğruluğu şərtində kriteriyanın müşahidə edilən qiymətinin bu oblasta düşməsi hadisəsinin ehtimalının əhəmiyyətlik səviyyəsinə bərabər olması şərtindən tapılır:

$$P(F \succ F_b(\alpha; n_1, n_2)) = \alpha$$

Qayda 2. Alternativ hipotez $H_1: DX \succ DY$ olduqda verilmiş α dəqiqlik səviyyəsinə və n_1, n_2 sərbəstlik dərəcələrinə görə $F_b(\alpha; n_1, n_2)$ böhran nöqtəsi tapılır.

$F_m < F_{\delta}$ olduqda əsas hipotezi rədd etməyə əsas yoxdur. $F_m > F_{\delta}$ olduqda isə əsas hipotez rədd edilir.

Baş yığının paylanma funksiyasının növü haqqında hipotezin yoxlanılması. Pirson kriteriyası.

Empirik paylanma ilə nəzəri paylanmanın uzlaşması, başqa sözlə baş yığının paylanma funksiyasının növü haqqında hipotezin yoxlanılması mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bu cür hipotezlərin yoxlanılması üçün müxtəlif uzlaşma kriteriyalarından məsələn, K. Pirsonun “Xi-kvadrat”, Kolmoqorov, Smirnov və s. kriteriyalarından istifadə edilir.

Uzlaşma kriteriyaları empirik paylanma ilə nəzəri paylanma arasındakı kənarlaşmanın əhəmiyyətli və yaxud əhəmiyyətsiz, yəni təsadüfün nəticəsi olub-olmadığını müəyyən etməyə imkan verir.

Əlamətin dəyişmə xarakteri haqqında ilkin nəzəri şərtlər baş yığım haqqında fərziyyənin irəli sürülməsi üçün əsas götürülə bilər. Bu şərtlərə mərkəzi limit teoreminə zəmin yaradan şərtlərin ödənilməsini, Puasson paylanmasına gətirən şərtlərin ödənilməsini və s. göstərmək olar.

Məsələn, Lyapunovun mərkəzi limit teoreminin şərtlərinə uyğun şərtlərin ödənilməsi baş yığının normal paylanması haqqında hipotezi irəli sürməyə əsas verir. Bir çox hallarda, empirik paylanmanın bəzi formal xassələri nəzəri paylanmanın növü haqqında hipotezi söyləməyə imkan verir. Məsələn, asimmetriya və ekses əmsallarının sıfıra bərabər olması baş yığının normal paylanması haqqında hipotezi söyləməyə əsas verir. Empirik paylanmanın seçmə ortasının və seçmə dispersiyasının bərabərliyi isə nəzəri paylanmanın Puasson qanununa tabe olduğunu söyləməyə əsas verir. Empirik paylanmanın poliqonuna və histoqramına əsasən də nəzəri paylanma haqqında bəzi hallarda fikir söyləmək olar.

Məsələn, $(x_i; n_i)$ $i=1,2,\dots,n$ nöqtələrinin düzbucaqlı koordinat sistemində müəyyən düz xəttin yaxınlığında yerləşməsi baş yığının normal paylanması haqqında hipotezi irəli sürməyə əsas verir. İrəli sürülən təkliflər qəti olmadığına, yəni fərziyyə xarakterli olduqlarına görə onlar uzlaşma kriteriyalarının köməyi ilə statistik yoxlanılmalıdır.

Tutaq ki, X baş yığımı $F(x)$ paylanma funksiyasına malikdir. Əvvəlcə fərz edək ki, $F(x)$ paylanma funksiyası tam müəyyəndir, yəni onun ifadəsi naməlum parametrlərdən asılı deyil və istənilən x üçün $F(x)$ hesablanı bilər. X baş yığımından həcmi n olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsinə götürək. H_0 : " X baş yığımı $F(x)$ paylanma funksiyasına malikdir" $F(x)$ hipotezini yoxlamaq üçün kriteriya seçək. Aydın ki, H_0 əsas $F(x)$ hipotezinin doğruluğu şərtində $F_n(x)$ paylanma funksiyasına $F(x)$ nəzəri paylanmasının anoloji kimi baxmaq olar. Təsadüf meyillər nəticəsində bu iki paylanma funksiyası bir qayda olaraq bərabər olmayacaq. Bununla yanaşı, məlum Qlivenko teoreminə görə n -nin kifayət qədər böyük qiymətlərində $F_n(x)$ $F(x)$ -ə ehtimala görə yığılacaqdır. Ona görə də əvvəlcə $F_n(x)$ empirik paylanma funksiyasının $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasından meylinin ölçüsü müəyyən edilməlidir. Axtarılan kriteriya bu ölçünün empirik paylanmanın xassələrinə əsaslanaraq seçilməlidir. Bu cür meyl ölçülərini müxtəlif şəkildə müəyyən etmək olar. Ancaq onların içərisində ən çox istifadə ediləni K. Pirson tərəfindən təklif edilmiş "xi-kvadrat" kriteriyası ilə bağlı olan meyl ölçüsüdür.

Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasının müəyyən $F(x)$ funksiyası olması hipotezini $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsi vasitəsilə yoxlamaq lazımdır. X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlər çoxluğunu k sayda kəsişməyən $S_1, \dots, S_k$ intervallarına ayraq. Bu kəmiyyətin $S_1, \dots, S_k$ intervallarına düşmə ehtimalını $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyası vasitəsilə tapmaq olar:

$$p_i = P(X \in S_i), i = 1, 2, \dots, k$$

Fərz edək ki, $p_i > 0$, n_i ilə $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsinin S_i intervalına düşən elementlərinin sayını işarə edək. $\sum_{i=1}^r n_i = n$. Onda X kəmiyyətinin qiymətlərinin n sınaq nəticəsində S_i intervalına düşməsinin tezliyi $\frac{n_i}{n}$ olar.

$$\sum_{i=1}^r n_i = n, \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{n} = 1$$

Beləliklə, seçmənin $F_n(x)$ empirik paylanma funksiyasının S_i intervalında artımı $\frac{n_i}{n}$, $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasındakı isə p_i olar. Seçmənin $F_n(x)$ paylanma funksiyasının $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasından meylini xarakterizə edə ölçünü müəyyən edək. Ən kiçik kvadratlar üsuluna görə $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasının seçmənin $F_n(x)$ empirik paylanma funksiyasından meylinin ölçüsü olaraq, əmsalları az-çox ixtiyari qaydadan seçilə bilər

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{n_i}{n} - p_i \right)^2$$

kəmiyyəti götürülə bilər.

K. Pirson isbat etmişdir ki, $c_i = \frac{n}{p_i}$ götürüldükdə, alınan

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i} \left(\frac{n_i}{n} - p_i \right)^2$$

meyl ölçüsü həddən artıq yaxşı xassələrə malikdir. Belə ki, χ^2 müşahidə edilən n_i tezlikləri və gözlənilən np_i tezlikləri ilə sadə şəkildə ifadə edilir. Aydındır ki, empirik və nəzəri tezliklər nə qədər yaxın olarlarsa, χ^2 kəmiyyəti bir o qədər kiçik olar və o, müəyyən dəqiqliklə empirik paylanmanın nəzəri paylanmadan meylinin ölçüsü olaraq qəbul edilə bilər.

K. Pirson isbat etmişdir ki, χ^2 kəmiyyətinin paylanma funksiyasının limit qiyməti “xi-kvadrat” paylanmasıdır.

Paylanmanın sərbəstlik dərəcəsi $r-1-k$ ədədinə bərabərdir. Burada r qrupların sayı k isə paylanmanın parametrləri sayıdır.

Kriteriyanı qurmaq məqsədilə elə sabit $\varepsilon > 0$ ədədi götürək ki, əsas hipotezin doğruluğu şərtində $\chi^2 > \varepsilon$ hadisəsinin ehtimalı kifayət qədər kiçik olsun, yəni bu hadisə praktiki olaraq mümkün olmayan hadisə olsun. Bu isə o deməkdir ki, əsas hipotezin doğruluğu şərtində $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsi üçün $\chi^2 > \varepsilon$ bərabərsizliyinin ödənilməsi praktiki olaraq mümkün deyildir. Buradan H_0 əsas hipotezini yoxlamaq üçün K. Pirsonun aşağıdakı uzlaşma kriteriyası alınır:

Verilmiş α əhəmiyyətlik səviyyəsinə və $r-1-k$ sərbəstlik dərəcəsinə görə “xi-kvadrat” kriteriyasının böhran nöqtələri cədvəlindən χ^2_{α} böhran nöqtəsini tapırıq. $\chi^2_m = 0$ olduqda nəzəri və empirik paylanma tam üst-üstə düşür. $\chi^2_{m\text{öş}} > \chi^2_{\alpha}$ olduqda H_0 əsas hipotez rədd edilir. $\chi^2_m < \chi^2_{\alpha}$ olduqda isə əsas hipotez qəbul edilir.

χ^2 -kriteriyasının tətbiqi zamanı aşağıdakı şərtlərə riayət edilməlidir:

1) təcrübü məlumatlar asılı olmamalıdır, yəni onlar təsadüfi seçmənin nəticələri olmalıdırlar;

2) seçmənin həcmi kifayət qədər böyük olmalıdır (praktiki olaraq $n > 50$);

3) hər bir intervalda ən azı 5 element olmalıdır.

Axırıncı şərt ödənilmədikdə tezlikləri 5 - dən kiçik olan intervalları əvvəlcədən birləşdirmək lazımdır.

İndi isə χ^2 kriteriyasının köməyi ilə H_0 : “Baş yığım normal paylanmaya malikdir” əsas fərziyyəsini yoxlayaq. Başqa sözlə, $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsinə $F(X)$ normal paylanma funksiyasına malik təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri kimi baxmaq olar.

Aşağıdakı iki hala baxaq:

1. Empirik paylanma bərabər addımlı intervallar ardıcılığı və onlara uyğun tezliklər şəklində verilmişdir.

Seçmənin bütün elementlərini öz daxilində saxlayan intervalı, eyni uzunluqlu r sayda kəsişməyən (x_i, x_{i+1}) intervallarına bölək və i -ci intervaldakı elementlərin sayını n_i ilə işarə edək. Qruplaşdırma intervallarının orta nöqtələrini variant olaraq qəbul edək.

Əsas fərziyyənin doğruluqu şərtində i -ci intervala uyğun p_i ehtimalını hesablayaq. Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki,

$$p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right), i = 1, 2, \dots, r$$

Burada $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$ Lanlas funksiyasıdır. a və σ parametrləri məlum

olduqda Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən p_i ehtimallarını tapa bilərik. Ancaq təcrübədə əksər hallarda a və σ parametrləri məlum olmur. Ona görə də onları seçmə orta və seçmə orta kvadratik meyl ilə əvəz edirlər. Bu xarakteristikaları hesablayarkən seçmənin elementi olaraq qruplaşdırma intervalının orta nöqtəsi götürülür:

$$z_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki, X təsadüfi kəmiyyətinin x_i, x_{i+1}) intervalına düşməsi ehtimalı təqribən onun uzunluğu ilə sıxlıq funksiyasının bu intervalın hər hansı nöqtəsindəki qiymətinin hasinə bərabərdir. Xüsusi halda

$$p_i = f(z_i)h$$

Məlumdur ki, $f(x) = \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$. Burada $\varphi(u)$ standart normal sıxlıqdır.

Onda $f(z_i) = \varphi\left(\frac{z_i - \bar{x}}{\sigma}\right)$. a -nı $\bar{x}$ ilə, σ -nı isə s_z əvəz etsək

$$np_i = \frac{nh}{s_z} \varphi(u_i), \quad u_i = \frac{z_i - \bar{x}}{s_z}$$

Beləliklə, H_0 əsas hipotezini yoxlamaq üçün aşağıdakı qaydanı alırıq. Tutaq ki, empirik paylanma qruplaşdırılmış seçmə şəklində verilmişdir:

Inter vallar	(x_0, x_1)	$(x_1, x_2) \dots$	(x_{r-1}, x_r)
Tezli klər	n_1	$n_2 \dots$	n_r

Bölmə 12. Reqressiya analizi.

Əsas anlayışlar

Riyazi statistikanın metodlarının tətbiqi zamanı aşağıdakı məsələyə tez-tez rast gəlinir.

$x_1, \dots, x_k$ dəyişənlərindən və $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ naməlum parametrlərindən asılı y təsadüfi kəmiyyəti öyrənilir. $(y, x_1, x_2, \dots, x_k)$ vektoruna $(k+1)$ -ölçülü baş yığım kimi, i -ci sınağın nəticələrinə

$$(y_i, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

isə bu yığımdan həcmələri n olan seçmələr kimi baxaq.

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ naməlum parametrlərini təyin etmək tələb edilir. Bu məsələyə cüt xətti reqressiya analizi məsələsi deyilir.

Qeyd edildiyi kimi reqressiya analizi y təsadüfi kəmiyyətinin $x_1, \dots, x_k$

dəyişənlərindən asılılığını öyrənən statistik təhlil metodudur. Burada $x_1, \dots, x_k$ dəyişənləri təsadüfi kəmiyyətlər hesab edilmir. Reqressiya analizinin tətbiqi zamanı y təsadüfi kəmiyyətinin σ^2 dispersiyalı normal paylanmaya malik olduğu fərz edilir.

Reqressiya tənliyinin və β_i əmsallarının əhəmiyyətliyi yoxlanması və β_i -lər üçün etibarlılıq intervalının qurulması üçün Y təsadüfi kəmiyyətlərinin normal paylanmaya malik olması zəruridir. Bu şərt β_i -lər üçün nöqtəvi qiymətləndirmələr qurulması üçün zəruri deyil.

Reqressiya tənliyində xətti model dedikdə naməlum $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ parametrlərindən xətti asılı olan model başa düşülür. Naməlum parametrlərdən və $x_1, \dots, x_k$ dəyişənlərindən xətti asılı olan model isə xüsusi xətti model adlanır.

Ümumi şəkildə reqressiya təhlilinin xətti modeli aşağıdakı şəkildədir:

$$y = \sum_{j=0}^k \beta_j \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_k) + \varepsilon$$

Burada, $\varphi_j - x_1, \dots, x_k$ dəyişənlərinin müəyyən funksiyası, ε isə təsadüfi kəmiyyətdir:

$$E\varepsilon = 0, D\varepsilon = \sigma^2$$

Reqressiya tənliyinin növü öyrənilən hadicənin təhlilinə əsasən müəyyən edilir. Təcrübədə adətən reqressiya tənliyinin aşağıdakı növlərinə rast gəlinir.

- 1) xətti - $\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 x$;
- 2) polinomial - $\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_k x^k$;
- 3) hiperbolik - $\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x}$;
- 4) n – ölçülü xətti - $\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$;
- 5) üstlü - $\tilde{y} = \beta_0 x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k}$;

Üstlü reqressiya tənliklərini loqarifləmə əməliyyatının köməyi ilə parametrlərə görə xətti tənliyə gətirmək olar.

Doğrudan da,

$$lq\tilde{y} = lq\beta_0 + \beta_1 lqx_1 + \dots + \beta_k lqx_k$$

$$lqx_i = u_i, i = 1, 2, \dots, k; lq\tilde{y} = \tilde{z}, lq\beta_0 = \beta_0^1$$

işarə etsək, əvəzləmədən sonra

$$\tilde{z} = \beta_0^1 + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k$$

olduğunu alırıq. Eyni qayda ilə

$$u = \frac{1}{x}, u_i = x^i, i = 1, 2, \dots, k$$

əvəzləmələrinin köməyi ilə hiperbolik və polinomial reqressiya tənlikləri xətti tənliklərə gətirilə bilər.

Cüt xətti reqressiya.

Regressiya əmsallarının təyini

Tutaq ki, öyrənilən hadicəmin təhlili əsasında demək olar ki, y, x – in xətti funksiyasıdır, yəni

$$\tilde{y} = E(y/x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

burada β_0 və β_1 seçmə müşahidəsinə əsasən qiymətləndirilməsi tələb edilən naməlum parametrlərdir. Tutaq ki, β_0 və β_1 parametrlərini tapmaq üçün (X, Y) baş yığımından həcmi n olan seçmə götürülmüşdür. i -ci ($i = 1, 2, \dots, n$) müşahidənin nəticəsini (x_i, y_i) ilə işarə edək. Bu halda regressiya analizi modeli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

şəklində olar. Burada ε_i -lər asılı olmayan normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$$E\varepsilon_i = 0, D\varepsilon_i = \sigma^2, E\varepsilon_i \varepsilon_j = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Ən kiçik kvadratlar üsuluna görə naməlum β_0 və β_1 əmsalları

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$$

şərtindən tapılır.

Q funksiyasının minimumunu tapmaq üçün β_0 və β_1 - ə görə xüsusi törəmələri hesablayaq:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i \end{cases}$$

Ekstremimun zəruri şərtinə əsasən β_0 və β_1 naməlum parametrlərini tapmaq üçün

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i) x_i = 0 \end{cases}$$

tənliklər sistemini alırıq. Burada b_0 və b_1 uyğun olaraq naməlum β_0 və β_1 parametrlərinin qiymətləndirmələridir. Sadə çevirmələrdən sonra

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

tənliklər sistemini alırıq. Bu tənliklər sisteminə normal tənliklər sistemi deyilir.

Tənliklər sistemini β_0 və β_1 görə həll edərək

$$\begin{cases} b_1 = \frac{Q_{xy}}{Q_x} \\ b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \end{cases} \quad (5)$$

olduğunu alırıq. Burada,

$$Q_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = n(\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y})$$

$$Q_x = \sum (x_i - \bar{x})^2 = n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)$$

Qeyd edək ki, $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ olduqda b_0 və b_1 üçün tapılmış ifadələr xeyli sadələşir. Belə

ki, bu şərt ödənildikdə

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\overline{xy}}{\bar{x}^2} \\ b_0 = \bar{y} \end{cases}$$

olur. Bu şərt ödənilmədikdə isə $x'_i = x_i - \bar{x}$ əvəzləməsi aparmaqla $\sum_{i=1}^n x'_i = 0$ şərtinə gəlmək olar.

Regressiya xətti $(\bar{x}, \bar{y})$ nöqtəsindən keçir. b_1 regressiyanın bucaq əmsalıdır və X -vahid qədər artdıqda Y -in orta hesabla neçə vahid artdığını göstərir.

Regressiya tənliyi qurulduqdan sonra Y -in müşahidə edilən qiymətlərini $y_i = \bar{y}_{x_i} + e_i$ şəklində göstərmək olar. ε_i xətaları kimi e_i qalıqları da təsadüfi kəmiyyətlərdir, ancaq onlar ε_i -lərdən fərqli olaraq müşahidə ediləndirlər.

$$\text{cov}(\bar{y}_x, e) = 0$$

olduğunu göstərək. Doğrudan da,

$$\bar{y}_x = b_0 + b_1 x, e = y - b_0 - b_1 x, \text{cov}(x, y) + b \frac{n-2}{n} S^2 = 0$$

olduğundan

$$\text{cov}(\bar{y}_x, e) = \text{cov}(b_0 + b_1 x, y - b_0 - b_1 x) = b_1 \text{cov}(x, y) - b_1^2 \frac{n-2}{n} S^2 = b_1 \left[\text{cov}(x, y) - b_1 \frac{n-2}{n} S^2 = 0 \right]$$

$s_x^2 = x^2 - \bar{x}^2$ və $s_y^2 = y^2 - \bar{y}^2$ qəbul edək. Onda

$$b_1 = \frac{Q_{xy}}{Q_x s_y} s_y = \rho \frac{s_y}{s_x}$$

Beləliklə, regressiya tənliyinin

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x})$$

şəklində olduğunu alırıq.

İndi isə göstərək ki, y normal paylanmış təsadüfi kəmiyyət olduqda ən kiçik kvadratlar və ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsulları ilə alınmış qiymətləndirmələr üst – üstə düşür.

Tutaq ki, (x, y) baş yığımdan həcmi n olan (x_i, y_i) , $(i = 1, 2, \dots, n)$ asılı olmayan seçməsi götürülmüşdür.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, regressiya analizində y_i -lərə asılı olmayan $(\tilde{y}_i, \sigma^2)$ parametrlili normal təsadüfi kəmiyyətlər kimi baxılır. Onda onların sıxlıq funksiyaları

$$p(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - \tilde{y}_i)^2}{2\sigma^2}}, \tilde{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

olar. Bu halda seçmənin həqiqətəoxşarlıq funksiyası

$$L = P(y_1, x_1; y_2, x_2; \dots, y_n, x_n; \beta_0, \beta_1; \sigma^2) = \\ = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - \tilde{y}_i)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \sigma^{-n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2}{2\sigma^2}}$$

şəklində olar.

Ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsuluna görə β_0, β_1 və σ^2 parametrlərinin qiymətləndirmələri olaraq L funksiyasına maksimum qiymət verən b_0, b_1 və s^2 qiymətlərini götürmək lazımdır. Verilmiş $x_1, x_2, \dots, x_n$ və σ^2 üçün

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$$

funksiyası özünün ən kiçik qiymətini aldıqda L həqiqətəoxşarlıq funksiyası öz maksimumunu alır. Bu isə ən kiçik kvadratlar üsuluna görə b_0 və b_1 tapılması şərtləri ilə

üst – üstə düşür.

Regressiya analizinin ilkin şərtləri. Qauss-Markov şərtləri

$\tilde{y} = E(y/x) = \beta_0 + \beta_1 x$ reqressiya modelində Y təsadüfi kəmiyyəti iki toplananın cəmindən ibarətdir:

1) təsadüfə olmayan $\beta_0 + \beta_1 x$;

2) təsadüfə ε .

Regressiya əmsalları Y təsadüfi kəmiyyətinin xətti funksiyasıdır və nəzəri olaraq onları da iki toplananın cəmi şəklində göstərmək olar.

$$(x, y) = \text{cov}(x, \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon) = \beta_1 D_x + \text{cov}(x, \varepsilon),$$
$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i = \frac{1}{n} \sum (\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 \bar{x} + \frac{1}{n} \sum \varepsilon_i,$$

munasibətlərinə əsasən β_0, β_1 reqressiya əmsalları üçün

$$b_1 = \beta_1 + \frac{\text{cov}(x, \varepsilon)}{D_x},$$
$$b_0 = \beta_0 + \left[\frac{1}{n} \sum \varepsilon_i - \frac{\bar{x} \text{cov}(x, \varepsilon)}{D_x} \right]$$

ifadələrini alırıq. Beləliklə, reqressiya əmsallarını iki toplananın cəmi şəklində göstərmək olar. Birinci toplanan reqressiya əmsallarının əsil qiymətinə bərabər olan təsadüfə olmayan kəmiyyətdir, ikincisi isə ε -dan asılı təsadüfə kəmiyyətdir.

Ən kiçik kvadratlar üsuluna əsaslanan reqressiya analizinin mümkün nəticələrdən ən yaxşısını verməsi üçün müəyyən şərtlər- Qauss- markov şərtləri ödənilməlidir. Bu şərtlər aşağıdakılardan ibarətdir:

1. İstənilən müşahidədə təsadüfə həddin riyazi gözləməsi sıfıra bərabər olmalıdır. Yəni, $M\varepsilon_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$

2. Bütün müşahidələr üçün təsadüfə həddin dispersiyası sabit olmalıdır. Yəni, $D\varepsilon_i = M\varepsilon_i^2 = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n$

3. Təsadüfə hədlər statistik asılı (korreliyə edilmiş) olmamalıdırlar. Yəni, $M\varepsilon_i \varepsilon_j = 0, i \neq j$

4. x_i dəyişəni təsadüfə kəmiyyət deyildir.

Qauss-Markov şərtləri ödənildikdə model klassik normal reqressiya modeli adlanır. Qauss-Markov şərtləri ilə yanaşı adətən, təsadüfi həddin $(0; \sigma^2)$ parametrli normal paylanmaya malik olduğu fərz edilir, $\varepsilon_i \in N(0; \sigma^2)$.

Qeyd edək ki, təsadüfi hədd normal paylanmaya malik olduqda onların koorrelirə edilməmiş şərti asılı olmayanlıq şərti ilə eynigüclüdür.

İndi isə Qauss-Markov şərtlərinin şərhini verək:

Beləliklə, birinci şərt parametrlərin qiymətləndirmələrinin yerinidəyişməyən yəni,

$$Eb_0 = \beta_0, Eb_1 = \beta_1$$

olduğunu göstərir. Qiymətləndirmənin yerini dəyişməyənliyi parametrlərin tapılmış qiymətləndirmələrinin onun əsil qiyməti ətrafında yerləşdiyi deməkdir. Bu şərt sabit hədd modelə daxil edildikdə həmişə ödənilir.

İkinci şərt hər bir müşahidədə təsadüfi həddin dispersiyasının sabit qaldığını göstərir. Burada dispersiya dedikdə təsadüfi həddin seçmə aparılanadək mümkün hərəkəti başa düşülür. Dispersiyanın məlum olmadığı qəbul edilir və onun qiymətləndirilməsi reqressiya analizinin əsas məsələlərindən biridir.

Təsadüfi həddin dispersiyasının bütün müşahidələr üçün eyni olması şərti homoskedastlik (bircinslilik) , dispersiyanın müşahidədən asılılığı isə heteroskedastlik adlanır. Beləliklə,

$$1. D\varepsilon_i = \sigma^2 - i = 1, 2, \dots, n \text{ homoskedastlik.}$$

$$2. D\varepsilon_i = \sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, n - \text{heteroskedastlik.}$$

Homoskedastlik şərti ödənilmədikdə reqressiya əmsallarının qiymətləndirməsi yerinidəyişməyən olsa da effektiv olmayacaqdır.

Homoskedastlikliyin mövcudluğunu yoxlamaq və aradan qaldırılması üçün xüsusi kriterilər vardır.

Üçüncü şərt müxtəlif müşahidələr üçün təsadüfi hədlərin korrelirə edilmədiklərini göstərir. Bu şərt ödənilmədikdə deyirlər ki, qalıqların avtokorrelyasiyası mövcuddur. Təsadüfi hədlərin asılı olmayanlıq şərti ödənilmədikdə reqressiya əmsallarının ən kiçik kvadratlar üsuluna görə alınmış qiymətləndirmələri yerinidəyişməyən olsalarda effektiv deyillər.

Avtokorrelyasiyanın mövcudluğunu yoxlamaq və aradan qaldırılması üçün də xüsusi kriterilər işlənilib hazırlanmışdır.

Dördüncü şərt mühüm əhəmiyyətə malikdir. Bu şərt ödənilmədikdə reqressiya əmsallarının qiymətləndirmələri yerindəyişən və əsaslı olmayan qiymətləndirmələrdir. Reqressiya analizində adətən dördüncü şərti daha zəif şərtlə - X -in və təsadüfi həddin paylanmalarının asılı olmaqlığı şərti ilə əvəz edirlər. Bu zaman reqressiya əmsallarının qiymətləndirmələrinin xassələri dəyişir.

Təsadüfi həddin normal paylanmaya malik olması şərti reqressiya əmsallarının əhəmiyyətliyi haqqında hipotezlərin yoxlanılması və onlar üçün etibarlılıq intervallarının qurulması üçün vacibdir.

Teorem (Qauss-Markov). 1-4 Qauss- Markov şərtləri ödənildikdə reqressiya əmsallarının ən kiçik kvadratlar üsulu ilə alınmış qiymətləndirmələri ən yaxşı xətti qiymətləndirmələrdir. Yəni, bu qiymətləndirmələr yerindəyişməyən, əsaslı və effektiv qiymətləndirmələrdir.

İsbatı. Aydındır ki,

$$\text{cov}(x, \varepsilon) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{n} \sum (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i$$

$$M \text{cov}(x, \varepsilon) = M \left[\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i \right] = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x}) M\varepsilon_i = 0,$$

$$D \text{cov}(x, \varepsilon) = D \left[\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i \right] = \frac{1}{n^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 D\varepsilon_i = \frac{Dx}{n} \sigma^2$$

$$M \frac{\sum \varepsilon_i}{n} = \frac{\sum M\varepsilon_i}{n} = 0,$$

$$D \frac{\sum \varepsilon_i}{n} = \frac{\sum D\varepsilon_i}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$M \frac{\bar{x} \text{cov}(x, \varepsilon)}{Dx} = \frac{\bar{x}}{Dx} M \text{cov}(x, \varepsilon) = 0,$$

$$D \frac{\bar{x} \text{cov}(x, \varepsilon)}{Dx} = \frac{(\bar{x})^2}{Dx} D \text{cov}(x, \varepsilon) = \frac{(\bar{x})^2 \sigma^2}{nDx}.$$

Qiymətləndirmələrin riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablayaq:

$$Mb = \beta_1 + M \frac{\text{cov}(x, \varepsilon)}{Dx} = \beta_1 + \frac{M \text{cov}(x, \varepsilon)}{Dx} = \beta_1,$$

$$Db = D \frac{\text{cov}(x, \varepsilon)}{Dx} = \frac{D \text{cov}(x, \varepsilon)}{D^2 x} = \frac{\sigma^2}{nDx},$$

$$Mb_0 = \beta_0 + M \frac{\sum \varepsilon_i}{n} - M \frac{\bar{x} \text{cov}(x, \varepsilon)}{Dx} = \beta_0,$$

$$Db_0 = D \frac{\sum \varepsilon_i}{n} + D \frac{\bar{x} \text{cov}(x, \varepsilon)}{Dx} = \frac{\sigma^2}{n} \left[1 + \frac{(\bar{x})^2}{Dx} \right] = \frac{\sigma^2(x^2)}{nDx}$$

Bu isə teoremin doğruluğunu göstərir.

Qeyri- xətti reqressiya.

Reqressiyanın qeyri -xəttiliyi dəyişənlərə və parametrlərə görə təyin edilir. Dəyişənlərə görə qeyri- xəttilik dəyişənlərin əvəz edilməsi, parametrlərə görə isə loqarifmləmə əməliyyatı üsulu ilə aradan qaldırılır. Məsələn, $y = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{x} + \varepsilon$ qeyri xətti tənliyi $z = \sqrt{x}$ əvəzləməsi aparmaqla $y = \beta_0 + \beta_1 z + \varepsilon$ tənliyinə, loqarifmləmə əməlinin köməyiylə $y = \beta_0 x^{\beta_1} \varepsilon$ qüvvət funksiyası $\ln y = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln x + \ln \varepsilon$ tənliyinə, $y = \beta_0 e^{\beta_1 x} \varepsilon$ eksponensial funksiyası isə $\ln y = \ln \beta_0 + \beta_1 x + \ln \varepsilon$ funksiyasına çevrilir və onların parametrləri ən kiçik kvadratlar üsulu ilə qiymətləndirilir.

Eyni zamanda $y = \beta_0 x^{\beta_1} + \varepsilon$ tənliyinə ε additiv daxil olduğuna görə onu xətti şəkllə gətirmək mümkün deyildir. Bu halda qeyri - xətti reqressiyanın qiymətləndirilməsinin xüsusi üsullarından istifadə edilir.

İqtisadiyyatda aşağıdakı fuhksiyalardan istifadə edilir:

1. Tələbin reqressiya təhlilində - $y = \beta_0 x \varepsilon$.
2. Zaman sıralarının tədqiqində - $y = \beta_0 e^{rt} \varepsilon$, burada t nisbi artımdır.

İqtisadi təhlildə $y = f(x)$ funksiyasının elastikliyi analiyışından istifadə edilir. $y = f(x)$ funksiyasının elastikliyi

$$\Theta = \frac{x}{y} f'(x)$$

kimi hesablanır və x -in nisbi dəyişməsinə nəzərən y -in nisbi dəyişməsinə xarakterizə edir. O, x -n 1% dəyişməsi nəticəsində y -in neşə faiz dəyişdiyini göstərir.

$y = a + bx$ xətti funksiyasının elastikliyi x -dən asılıdır. Yəni,

$$\mathfrak{E} = b \frac{x}{y}$$

Ona görə də elastikliyin orta göstəricisi

$$\bar{\mathfrak{E}} = b \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

hesablanılır.

Regressiya əmsalları üçün etibarlılıq intervallarının qurulması

β_0 regressiya əmsalı üçün etibarlılıq intervalının qurulması.

Tutaq ki, $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Onda

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i) = n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = n\beta_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

olar. Buradan

$$\beta_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i ; \quad \beta_0 = \bar{y}_0 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

və yaxud

$$\bar{y}_0 - \beta_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

olduğunu alırıq.

Deməli, $\bar{y}_0 - \beta_0$ fərqi normal təsadüfə kəmiyyətlərin xətti funksiyasıdır, ona görə də o özündə normal paylanmaya malikdir və onun parametrləri aşağıdakı kimidir

$$M(\bar{y}_0 - \beta_0) = M \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0,$$

$$D(\bar{y}_0 - \beta_0) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D\varepsilon_i = \frac{\sigma^2}{n}$$

Beləliklə, $\bar{y}_0 - \beta_0 \in H\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Buradan aydın olur ki, $z = \frac{\bar{y}_0 - \beta_0}{\sigma} \sqrt{n}$ təsadüfə

kəmiyyəti standart normal paylanmaya malikdir. Digər tərəfdən

$$u^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$$

statistikası sərbəstlik dərəcəsi $k = n - 2$ olan χ^2 (xi - kvadrat) paylanmasına malikdir. Burada,

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$$

σ^2 dispersiyasının ən böyük həqiqətəoxşarlıq üsulu ilə tapılmış qiymətləndirməsidir.

Styudent paylanmasının tərifinə görə

$$t = \frac{z}{u} \sqrt{k} = \frac{(b_0 - \beta_0) \sqrt{n}}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{s \sqrt{n}} \cdot \sqrt{n-2} = \frac{(b_0 - \beta_0) \sqrt{n-2}}{s}$$

statistikanın sərbəstlik dərəcəsi $k = n - 2$ olan Styudent paylanmasına malik olduğunu deyə bilərik. Styudent paylanmasının sıxlıq funksiyası cüt olduğundan,

$$\left| \frac{\sqrt{n-2}(\bar{b}_0 - \beta_0)}{C} \right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyinin baş verməsi ehtimalı

$$\Pi \left(\left| \frac{\sqrt{n-2}(\bar{b}_0 - \beta_0)}{C} \right| < \varepsilon \right) = 2 \int_0^\varepsilon C_H(\tau) d\tau$$

bərabərliyi ilə hesablanır. Burada $S_n(t)$ Styudent sıxlığıdır.

Axırıncı bərabərlikdən

$$\Pi \left(\left| \bar{b}_0 - \beta_0 \right| < \frac{C}{\sqrt{n-2}} \varepsilon \right) = 2 \int_0^\varepsilon C_H(\tau) d\tau$$

və ya

$$\Pi \left(\bar{b}_0 - \varepsilon \frac{C}{\sqrt{n-2}} < \beta_0 < \bar{b}_0 + \varepsilon \frac{C}{\sqrt{n-2}} \right) = 2 \int_0^\varepsilon C_H(\tau) d\tau$$

münasibətini alırıq. Bu münasibəti

$$\int_0^t S_n(u) du = \frac{1-\alpha}{2}$$

bərabərliyindən təyin olunan t_α ədədi vasitəsi ilə

$$P \left(b_0 - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-2}} < \beta_0 < b_0 + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-2}} \right) = 1 - \alpha$$

kimi yazmaq olar. Deməli,

$$\left(\bar{b}_0 - \frac{C}{\sqrt{n-2}} t_\alpha, \bar{b}_0 + \frac{C}{\sqrt{n-2}} t_\alpha \right)$$

intervalı β_0 parametrinin $1-\alpha$ ehtimalına uyğun olan etibarlılıq intervalıdır. Nəzərə alınmalıdır ki, α əhəmiyyətlik səviyyəsi verildikdə t_α ədədi Styudent paylanmasının qiymətləri cədvəlindən tapılır.

β_1 reqressiya əmsalı üçün etibarlılıq intervalının qurulması.

$$\begin{aligned} \sum x_i \check{y}_i &= \sum (\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i) x_i = \beta_0 \sum x_i + \beta_1 \sum x_i^2 + \sum x_i \varepsilon_i = \\ &= \beta_1 \sum x_i^2 + \sum x_i \varepsilon_i \end{aligned}$$

Axırıncı tənlikdən β_1 -i tapırıq:

$$\beta_1 = b_1 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$b_1 - \beta_1$ fərqi normal paylanmış $\varepsilon_n \in H(0, \sigma^2)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) təsadüfi kəmiyyətlərinin xətti kombinasiyası olduğuna görə o özü də normal paylanmaya malik olar. $b_1 - \beta_1$ fərqinin parametrlərini tapaq:

$$E(b_1 - \beta_1) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i E\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 0$$

$D\varepsilon_i = \sigma^2$ olduğuna və ε_i -lər asılı olmadıqlarına görə

$$D(b_1 - \beta_1) = \frac{1}{\left(\sum x_n^2\right)^2} \sum x_n^2 D\varepsilon_n = \frac{\sigma^2}{\sum x_n^2}$$

olduğunu yaza bilərik.

Beləliklə,

$$b_1 - \beta_1 \in H\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{\sum x_n^2}}\right)$$

olar. Onda

$$z = \frac{b_1 - \beta_1}{\sigma} \sqrt{\sum x_n^2} \in H(0, 1)$$

olduğunu deyə bilərik. Beləliklə, sərbəstlik dərəcəsi $n-2$ olan

$$T = \frac{z}{u} \sqrt{n-2} = \frac{(b_1 - \beta_1) \sqrt{\sum x_n^2}}{C} \sqrt{\frac{n-2}{n}}$$

statistikasını alırıq.

β_1 əmsalı üçün etibarlılıq intervalının qurulmasına uyğun olaraq β_1 əmsalı üçün

$$\left(b_1 - t_\alpha \frac{C}{\sqrt{\sum x_n^2}} \sqrt{\frac{n}{n-2}}; \quad b_1 + t_\alpha \frac{C}{\sqrt{\sum x_n^2}} \sqrt{\frac{n}{n-2}} \right)$$

etibarlılıq intervalını alırıq.

Şərti riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervalının qurulması.

Tutaq ki, $\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1(x - \bar{x})$ reqressiya tənliyinin qiymətləndirməsi $\bar{y}_x = b_0 + b_1(x - \bar{x})$ - dir.

$\bar{y}_x$ normal paylanmaya malik iki b_0 və b_1 təsadüfi kəmiyyətlərin xətti funksiyası olduuna görə normal təsadüfi kəmiyyət olar. Bu paylanmanın parametrlərini tapaq:

$$E\bar{y}_x = Eb_0 + (x - \bar{x})Eb_1 = \beta_0 + \beta_1(x - \bar{x})$$

Beləliklə, $E\bar{y}_x = \tilde{y}$

$D\bar{y}_x$ dispersiyasını tapmaq üçün əvvəlcə b_0 və b_1 təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmadıqlarını göstərək. b_0 və b_1 fərqləri normal paylanmaya malik olduqlarına görə onların kolları ilə edilməyən olduqlarından asılı olmadıqları alınır.

Beləliklə,

$$E(b_0 - \beta_0)(b_1 - \beta_1) = 0$$

olduğunu göstərmək kifayətdir.

$$\begin{aligned} E(b_0 - \beta_0)(b_1 - \beta_1) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\right) = \\ &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sum_{i=1}^n E \varepsilon_i \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) \varepsilon_j \end{aligned}$$

ε -lərin asılı olmadıqlarına, x_i -lər təsadüfi olmayan kəmiyyətlər və $E \varepsilon_i \varepsilon_j = 0, i \neq j$ olduğuna görə

$$E \varepsilon_i \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) \varepsilon_j = (x_i - \bar{x}) E \varepsilon_i^2 = (x_i - \bar{x}) \sigma^2$$

$$E \varepsilon_i^2 = \sigma^2, \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \text{ olduğunu nəzərə alsaq,}$$

$$E(b_0 - \beta_0)(b_1 - \beta_1) = \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sigma^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

olduğunu yazı bilərik.

Deməli, b_0 və b_1 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda dispersiyanın məlum xassəsinə görə

$$D\bar{y}_x = Db_0 + (x - \bar{x})^2 Db_1$$

olar. Digər tərəfdən

$$\begin{aligned} D(b_0 - \beta_0) &= Db_0 = \frac{\sigma^2}{n} \\ D(b_1 - \beta_1) &= Db_1 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{aligned}$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$D\bar{y}_x = \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + n \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

Deməli,

$$\bar{y}_x \in N \left(\tilde{y}; \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + n \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \right)$$

Onda

$$z = \frac{\bar{y}_x - \tilde{y}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + n \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}} \in N(0;1)$$

olar. Beləliklə,

$$t = \frac{\bar{y}_x - \tilde{y}}{s \sqrt{1 + n \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}} \sqrt{n-2}$$

təsadüfə kəmiyyətinin sərbəstlik dərəcəsi $n-2$ olan Student paylanmasına malik olduğunu alırıq.

Onda $x=x_0$ olduqda $\tilde{y}$ üçün

$$\left(b_0 + b_1 x_0 - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-2}} \sqrt{1 + n \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, b_0 + b_1 x_0 + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-2}} \sqrt{1 + n \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \right)$$

etibarlılıq intervalını alırıq.

Regressiya tənliyinin əhəmiyyətliliyinin yoxlanılması

Əsas hipotezi i $H_0 : \beta_1 = 0$, alternativ hipotezi $H_1 : \beta_1 \neq 0$ şəklində qəbul edək.

$$t = \frac{b_1}{\hat{s}_{b_1}} \in St(n-2)$$

Burada, $\hat{s}_{b_1}^2 = \frac{\hat{s}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{s} = s \sqrt{\frac{n}{n-2}}$ - b_1 kəmiyyətinin dispersiyasının

qiymətləndirməsidir.

$|t| > t_{b\bar{o}h}(\alpha, n-2)$ əsas fərziyyə rədd edilir. Bu isə o deməkdir ki, regressiya tənliyi əhəmiyyətlidir. Əks halda onu rədd etməyə heç bir əsas yoxdur, yəni regressiya tənliyi əhəmiyyətsizdir.

Əhəmiyyətli regressiya tənliyi üçün regressiya əmsalları və şərti riyazi gözləmə üçün etibarlılıq intervallarının qurulması mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

