AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

MEXANİKA-RİYAZİYYAT FAKÜLTƏSİ

ÜMUMİ RİYAZİYYAT KAFEDRASI

«ALİ RİYAZİYYAT»

KURSUNDAN

MÜHAZİRƏLƏR

MÜƏLLİM: **İSAYEVA S.**

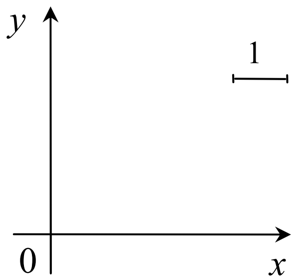
BAKI – 2007

MÜHAZİRƏ 1
KOORDİNATLAR ÜSULU

Düzbucaqlı koordinat sistemi və onun çevrilməsi

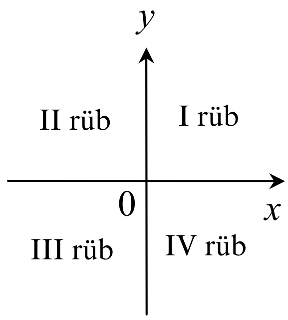
Müstəvidə nöqtənin *koordinatları* dedikdə bu nöqtənin müstəvidə vəziyyətini təyin edən ədədlər başa düşülür.

Müstəvidə *düzbucaqlı dekart koordinat sistemi* belə daxil olunur: müstəvidə O nöqtəsi götürülür (*koordinat başlanğıcı*), bu nöqtədən bir-birinə perpendikulyar olan iki – *Ox* və *Oy* oxları (koordinat oxları) keçirilir. Əlverişli olmaq üçün fərz edilir ki, *Ox* oxu (*absis oxu*) üfqi vəziyyətdədir və soldan sağa yönəlib, *Oy* oxu isə (*ordinat oxu*) şaqulidir və aşağıdan yuxarıya yönəlib. Bundan başqa ölçü vahidi seçilir.

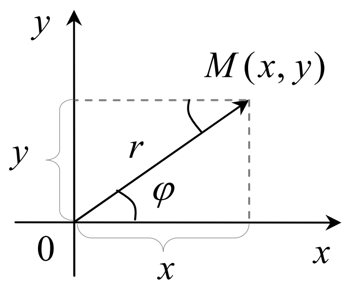


Nöqtənin *x absisi* dedikdə, bu nöqtənin ordinat oxundan olan məsafəsi başa düşülür və əgər nöqtə ordinat oxundan sağdadırsa, «+» işarəsi ilə, soldadırsa, «–» işarəsi ilə götürülür. Analoji qayda ilə nöqtənin *y ordinatı* daxil olunur (burada absis oxundan olan məsafə götürülür, müvafiq işarə ilə). Bu iki *x* və *y* ədədləri nöqtənin *düzbucaqlı dekart koordinatları* adlınır.

M nöqtəsinin koordinatları *x* və *y* isə, bu belə işarə olunur: M(*x*, *y*). Hər bir *x* və *y* ədədləri cütünə müstəvinin koordinatları bu ədədlər olan yeganə bir nöqtə uyğun gəlir və əksinə, müstəvinin hər bir nöqtəsinin müəyyən *x* və *y* koordiantı var.



Ox və *Oy* oxları müstəvini *rüblər* adlanan 4 hissəyə bölür. M nöqtəsini O başlanğıcı ilə birləşdirən OM vektoruna M nöqtəsinin *radius-vektoru* deyilir. OM-in *Ox*-oxunun müsbət istiqamətilə əmələ gətirdiyi bucağı φ ilə işarə etsək, alarıq:



$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \qquad (1)$$

İnanmaq çətin deyil ki, (1) düsturu ixtiyari rübün nöqtələri üçün doğrudur.

Müəyyən məsələlərin həllində bir düzbucaqlı koordinat sisteminin əvəzinə başqasını seçmək daha əlverişli olur. Ona görə də bir düzbucaqlı koordinat sistemindən digərinə keçid məsələsi ortaya çıxır.

Əvvəlcə sadə hala baxaq. Fərz edək ki, düzbucaqlı koordinat sistemi paralel köçürülüb. Yəni, yeni $O'x'y'$ sisteminin oxları uyğun olaraq əvvəlki Oxy sisteminin oxlarına paraleldir. $O'(a, b)$ olarsa, aydındır ki,

$$\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned} \qquad (*)$$

olar. Yəni nöqtənin yeni koordinatları onun əvvəlki koordinatları ilə koordinat başlanğıcının əvvəlki koordinatlarının fərqinə bərabərdir və tərsinə:

$$\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned} \qquad (**)$$

İndi tutaq ki, yeni $O'x'y$ koordinat sistemi Oxy koordinat sistemindən α bucağı qədər dönmə nəticəsində alınıb:

$\angle MOx' = \beta$ olsun. Onda $\angle MOx = \alpha + \beta$ olar. $OM = r$,

$$x = r\cos(\alpha + \beta) = r\cos\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

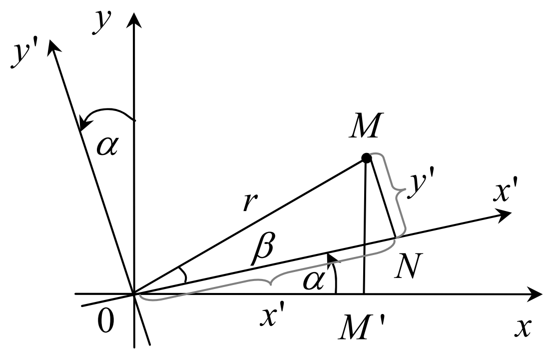
$$y = r\sin(\alpha + \beta) = r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Digər tərəfdən

$$\begin{aligned} x' &= ON = r\cos\beta \\ y' &= MN = r\sin\beta \end{aligned}$$

olduğundan (1) və (2)-dən alarıq

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$



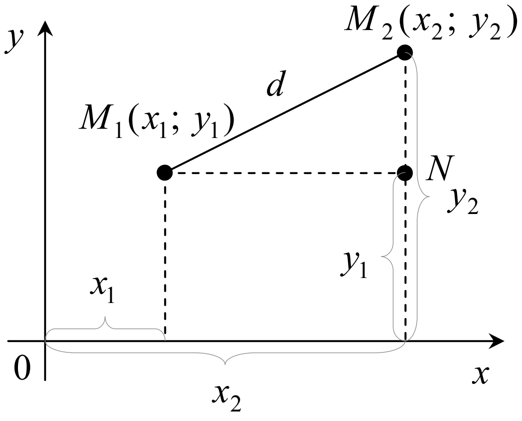
Aydındır ki, bu iki bərabərlikdən x', y'-i x, y ilə ifadə etmək olar. Nəhayət, əgər Oxy koordinat sistemi həm paralel köçürülübsə, həm də α bucağı qədər döndərilibsə (*) və (3)-dən alarıq:

$$\begin{aligned} x &= a + x'' = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= a + y'' = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}$$

Müstəvidə iki nöqtə arasındakı məsafə

Teorem. Koordinat müstəvisinin istənilən iki $M_1(x_1;\ y_1)$ *və* $M_2(x_2;y_2)$ nöqtələri arasındakı d məsafəsi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$



İsbatı. ΔM_1M_2N-dən

$$M_1M_2=d=\sqrt{M_1N^2+NM_2^2}=$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Deməli,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

Qeyd edək ki, isbatı nöqtələr I rübdə və $x_2>x_1$, $y_2>y_1$ olduğu hal üçün apardıq. Düsturda koordinatlar fərqi kvadratı ilə iştirak etdiyindən qalan hallarda da bu düstur doğrudur.

Beləliklə, (1) düsturu isbat olundu.

Misal. $M_1(-2;\ 3)$ *və* $M_2(5;\ 4)$ nöqtələri arasındakı *d* məsafəsini tapaq.

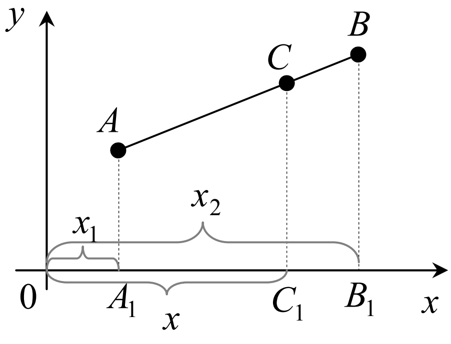
Həlli. (1) düsturuna əsasən yaza bilərik:

$$d=\sqrt{(5-(-2))^2+(4-3)^2}=\sqrt{49+1}=5\sqrt{2}(vahid)\,.$$

Cavab: $5\sqrt{2}$ vahid.

Parçanın verilmiş nisbətdə bölünməsi

Teorem. Əgər $C(x;y)$ nöqtəsi ucları verilmiş $A(x_1;y_1)$, $B\ (x_2;y_2)$ olan AB parçasını A-dan başlayaraq λ nisbətində bölürsə $(AC/CB=\lambda)$, onda x,y koordinantları aşağıdakı düsturlarla hesablanır:



$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

İsbatı: $AA_1||OX,\ BB_1||OX,\ CC_1||OX$ çəkək. Elementar həndəsədən məlum teoremə görə:

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}=\lambda$$

$$A_1C_1=O_1C_1-OA_1=x-x_1$$

$$C_1B_1=OB_1-OC_1=x_2-x$$

olduğundan

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$$

olar. Buradan isə

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Analoji qayda ilə ala bilərik ki,

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Qeyd: x, y koordinatları üçün düsturların çıxarılışında AB parçasının uclarının I rübdə yerləşdiyini fərz etdik. Asanlıqla göstərmək olar ki, bu düsturlar AB parçasının koordinant müstəvisinin istənilən hissəsində yerləşməsi üçün də doğrudur.

Misal. A(–5; –3), B(4; –6), C∈AB, AC/CB=3/2, C(x;y)-?

$$\lambda=\frac{3}{2},\ (x_1;\ y_1)=(-5;\ -3),\ (x_2;\ y_2)=(4;\ -6)$$

$$x=\frac{-5+\frac{3}{2}\cdot 4}{1+\frac{3}{2}}=\frac{2}{5},\ y=\frac{-3+\frac{3}{2}\cdot(-6)}{1+\frac{3}{2}}=-4\frac{4}{5}$$

Cavab: $\left(\frac{2}{5};-4\frac{4}{5}\right)$.

Müstəvidə xəttin tənliyi

Əvvəlki mövzularda gördük ki, düzbucaqlı koordinatlardan istifadə etməklə, sırf cəbri üsulla həndəsi məsələləri həll etmək olur. Ali riyaziyyatın həndəsi fiqurların xassələrini cəbrin köməyilə öyrənən bölməsinə analitik həndəsə deyilir. Bu məqsədlə koordinatlardan üstifadə olunması *koordinatlar üsulu* adlanır.

Analitik həndəsənin əsas anlayışlarından biri *xəttin tənliyi* anlayışıdır.

Müstəvidə *xətt* (*və ya əyri*) dedikdə müəyyən şərti ödəyən nöqtələrin həndəsi yeri başa düşülür.

Koordinat müstəvisində verilmiş *xəttin tənliyi* dedikdə elə $F(x, y) = 0$ tənliyi başa düşülür ki, əyri üzərində yerləşən ixtiyari nöqtənin (x, y) koordinatları bu tənliyi ödəyir, əyri üzərində yerləşməyən heç bir nöqtənin koordinatları isə ödəmir. Xəttin tərtibi dedikdə xəttin tənliyinə daxil olan cari dəyişənlərin ən yüksək dərəcəsi başa düşülür. Məsələn, (2; 3) mərkəzli 7 radiuslu çevrənin tənliyi $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 49$-dur.

Müstəvidə analitik həndəsənin iki əsas məsələsi var:

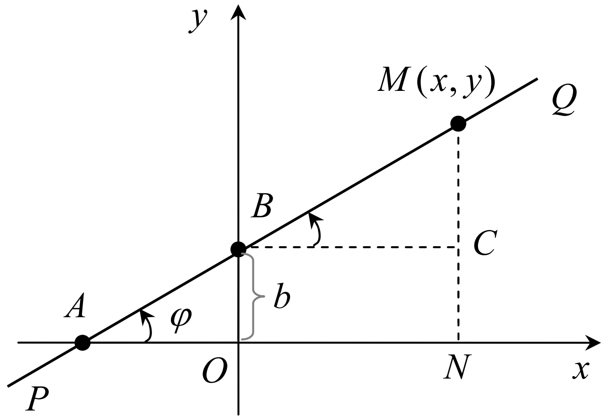
1) verilmiş əyrinin tənliyini yazmaq;

2) verilmiş tənliyinə görə xəttin forma və vəziyyətini öyrənmək.

MÜHAZİRƏ 2
MÜSTƏVİDƏ DÜZ XƏTT

Düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi. Düz xəttin ümumi tənliyi

Tutaq ki, koordinant müstəvisində ordinant oxuna paralel olmayan PQ düz xətti verilib. Bu düz xəttin absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağı φ ilə işarə edək: $\varphi = \angle BAx$ (*meyl bucağı*), $A = PQ \cap Ox, B = PQ \cap Oy$. φ meyl bucağı bir-birindən $\pm n\pi$ $(n \in N)$ ilə fərqlənən müxtəlif qiymətlər ala bilər. Adətən, meyl bucağı olaraq onun ən kiçik mənfi olmayan qiyməti götürülür, yəni, tutaq ki, $0 \le \varphi < \pi$ (hələlik $\varphi \ne \frac{\pi}{2}$). φ meyl bucağının tangensinə PQ düz xəttinin *bucaq əmsalı* deyilir və k ilə işarə olunur: $k=\text{tg}\varphi$.



$OB=b$ (*başlanğıc ordinat*) olsun. Əgər k bucaq əmsalı və b başlanğıc ordinatı məlum olarsa, PQ düz xəttinin tənliyini çıxaraq. Bu məqsədlə PQ düz xətti üzərində yerləşən istənilən $M(x;y)$ nöqtəsi götürək. $BC||OX$, $MN||OY$ çəkək. Aydındır ki,

$$y=MN=MC+CN=BC\cdot tg\varphi+b=k\cdot BC+b=k\cdot ON+b=k\cdot x+b.$$

Alırıq ki,

$$y=kx+b \qquad (1)$$

(1)-ə düz xəttin *bucaq əmsallı tənliyi* deyilir. Əgər $k=0$ olarsa düz xətt OX oxuna paralel olur və onun tənliyi $y=b$ şəklinə düşür. (1)-də $b=0$ olarsa, $y=kx$ alınır ki, bu da koordinant başlanğıcından keçən düz xəttin tənliyidir.

Beləliklə, OX oxuna perpendikulyar olmayan istənilən düz xəttin tənliyi (1) şəklindədir. Aydındır ki, bunun tərsi də doğrudur: (1) şəkilli istənilən tənlik k bucaq əmsallı və b başlanğıc ordinatlı bir düz xətti təyin edir.

Misal. Oy oxundan b=3 parçasını ayıran və Ox oxu ilə $\varphi = \frac{\pi}{6}$ bucağını əmələ gətirən düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli. $k = tg\varphi = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = kx + b = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3.$

Cavab: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3.$

Əgər $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olarsa, başqa sözlə, PQ düz xətti ordinat oxuna paralel olarsa, bu düz xəttin tənliyi

$$x=a \tag{2}$$

şəklində olar; burada a düz xəttin Ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin absisidir.

(1) və (2) düsturlarından görünür ki, düz xəttin tənliyi x və y koordinatlarına nəzərən birdərəcəli tənlikdir, başqa sözlə $Ax+By+C=0$ şəklindədir. Bu təklifin tərsi də doğrudur.

Teorem. İstənilən

$$Ax+By+C=0 \quad (A^2+B^2\neq 0) \tag{3}$$

birdərəcəli tənliyi Oxy müstəvisində hər hansı düz xəttin tənliyidir (*düz xəttin ümumi tənliyi*).

İsbatı. 1) Tutaq ki, $B\neq 0$. Onda (3) tənliyindən alırıq ki,

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Aydındır ki, bu – bucaq əmsalı $k = -\frac{A}{B}$, başlanğıc ordinatı $b = -\frac{C}{B}$ olan düz xəttin tənliyidir.

2) Tutaq ki, $B=0$. Onda $A\neq 0$ olar. (3) tənliyindən

$$Ax + C = 0,\ x = -\frac{C}{A}.$$

Bu isə Oy oxuna paralel, Ox oxundan $a = -\frac{C}{A}$ parçasını ayıran düz xəttin tənliyidir.

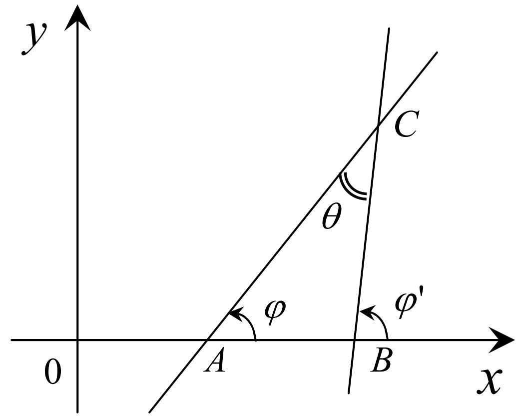
İki düz xətt arasındakı bucaq

Ordinat oxuna paralel olmayan və bir-birinə perpendikulyar olmayan k və k' əmsallı iki düz xətt götürək:

$$y=kx+b, \qquad (1)$$

$$y=k'x+b. \qquad (2)$$

Burada $k=tg\,\varphi$, $k'=tg\,\varphi'$.



(1) və (2) düz xətləri arasındakı θ bucağını tapaq (aydındır ki, onlar arasındakı digər bucaq $\pi-\theta$ olar).

Elementar həndəsədən məlumdur ki, üçbucağın hər hansı təpəsindəki xarici bucağı onunla qonşu olmayan iki daxili bucağın cəminə bərabərdir. Ona görə də ABC üçbucağında $\varphi'=\theta+\varphi$ və buradan da $\theta=\varphi'-\varphi$ olar. Onda:

$$tg\theta = tg(\varphi'-\varphi) = \frac{tg\varphi' - tg\varphi}{1+tg\varphi' tg\varphi} = \frac{k'-k}{1+k'k}$$

$$tg\theta = \frac{k'-k}{1+k'k}. \qquad (3)$$

Aydındır ki, (3) münasibətinin sağ tərəfindəki ifadədə *k və k'*-in yerini dəyişdikdə verilmiş iki düz xətt arasındakı digər bucağın ($\pi-\theta$ bucağının) tangensi alınır. Beləliklə, (3) düsturu iki düz xətt arasındakı bucaqlardan birinin tangensini bu düz xətlərin bucaq əmsalları ilə ifadə edir.

İndi isə düz xətlərin paralellik və perpendikulyarliq şərtlərini alaq.

Əgər (1) və (2) düz xətləri paralel olarsa, $\varphi=\varphi'$ oldugundan $k=k'$ olar. Tərsinə, əgər $k=k'$ olarsa, yəni $tg\,\varphi=tg\,\varphi'$ olarsa, φ və φ' bucaqlarının 0 ilə π arasında dəyişməsi şərtini nəzərə alsaq, $\varphi=\varphi'$ alınar; yəni düz xətlər paralel olar.

Düz xətlərin paralellik şərti. paralel düz xətlərin bucaq əmsalları bərabərdir və tərsinə, bucaq əmsalları bərabər olan düz xətlər paraleldir.

İndi tutaq ki, (1) və (2) düz xətləri perpendikulyardır: $\theta=\pi/2$. Onda:

$$\varphi'=\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}+\varphi,$$

$$tg\varphi'=tg\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-ctg\varphi=-\frac{1}{tg\varphi}, \text{ yəni } k'=-\frac{1}{k}.$$

Mühakimələr ardıcıllığını tərsinə aparmaqla göstərmək olar ki, $kk'=-1$

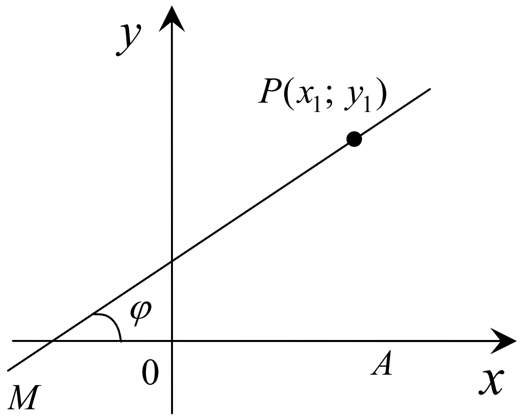
olarsa, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ olar.

Beləliklə, *düz xətlərin perpendikulyarlıq şərti* belə olar: iki düz xətt perpendikulyardırsa, onların bucaq əmsallarının hasili –1-ə bərabərdir və tərsinə, bucaq əmsallarının hasili –1-ə bərabər olan düz xətlər perpendikulyardır.

Məsələn, $y=3x-2$ və $y=3x$ düz xətləri paraleldir, $y=5x-2$ və $y=-0{,}2x+8$ düz xətləri isə perpendikulyardır.

Verilmiş nöqtədən keçən verilmiş istiqamətli düz xəttin tənliyi

Tutaq ki, koordinat müstəvisində verilmiş $P(x_1,\ y_1)$ nöqtəsindən keçən və verilmiş φ meyl bucaqlı düz xəttin tənliyini yazmaq tələb olunur. Əvvəlcə fərz edək ki, bu düz xətt ordinat oxuna paralel deyildir. Aydındır ki, bu düz xəttin tənliyi $y=kx+b$ şəklindədir, burada $k=tg\varphi$. Həmin düz xətt $P(x_1,\ y_1)$ nöqtəsindən keçdiyindən $y_1=kx_1+b$ ödənilir. $y=kx+b$ və $y_1=kx_1+b$ bərabərliklərini tərəf-tərəfə çıxsaq, alarıq:



$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{1}$$

(1) – $(x_1,\ y_1)$ nöqtəsindən keçən, k bucaq əmsallı düz xəttin tənliyidir.

Əgər düz xətt verilmiş $P(x_1,\ y_1)$ nöqtəsindən keçirsə və ordinat oxuna paraleldirsə, onda onun tənliyi

$$x = x_1$$

şəklində olar.

Verilmiş iki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyi

Məlumdur ki, müstəvinin üst-üstə düşməyən iki nöqtəsindən bir düz xətt keçirmək olar. Tutaq ki, koordinat müstəvisində verilmiş $P(x_1,\ y_1)$ və $Q(x_2,\ y_2)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazmaq tələb olunur. Əvvəlcə fərz edək ki,

$x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Baxılan düz xətt $P(x_1, y_1)$ nöqtəsindən keçdiyindən, bucaq əmsalını k ilə işarə etsək (k hələlik məlum deyil), onun tənliyi

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{1}$$

şəklində olar. Digər tərəfdən bu düz xətt $Q(x_2, y_2)$ nöqtəsindən də keçdiyindən,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \tag{1}$$

olar. (1) və (2) bərabərliklərini tərəf-tərəfə bölsək, $x_1 \neq x_2$ və $y_1 \neq y_2$ üçün, alarıq:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

(3) münasibəti verilmiş $P(x_1, y_1)$ və $Q(x_2, y_2)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyidir($x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ olduqda).

Əgər $x_1 = x_2$ olarsa, onda verilmiş $P(x_1, y_1)$ və $Q(x_2, y_2)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi (3) bərabərliyinə görə

$$x = x_1$$

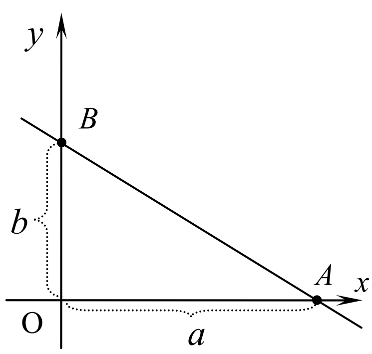
şəklində, əgər $y_1 = y_2$ olarsa, onda

$$y = y_1$$

şəklində olar.

Düz xəttin parçalarla tənliyi

Tutaq ki, AB düz xəttinin koordinat oxlarından «kəsdiyi parçalar» məlumdur. Yəni, tutaq ki, AB parçası Ox oxundan OA=a, Oy oxundan OB=b parçasını ayırır. Bu düz xəttin tənliyini alaq.



AB düz xətti A(a; 0), B(b; 0)-dən keçdiyindən onun tənliyi

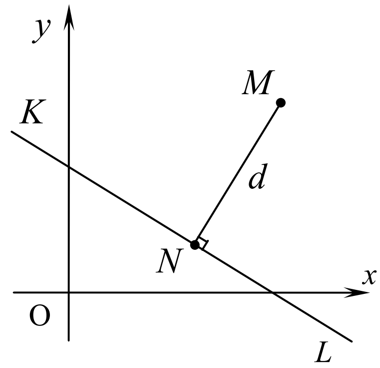
$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$$

və ya

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

şəklində olar. Bu, ***düz xəttin parçalarla tənliyi*** adlanır.

Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə



Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə, bu nöqtədən düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğuna deyilir.

Tutaq ki, müstəvi üzərində

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

tənlikli düz xətt və $M(x_1; y_1)$ nöqtəsi verilmişdir. Bunlara əsasən $d = MN$ məsafəsini təyin etmək tələb olunur. MN perpendikulyarının tənliyi $B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$ şəklində oluğundan və bu perpendikulyar $N(x_2; y_2)$ nöqtəsindən keçdiyindən

$$B(x_2 - x_1) - A(y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{A} = \frac{y_2 - y_1}{B} = t \qquad (2)$$

Burada t mütənasiblik əmsalıdır. Onda

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{A^2 + B^2}\,|t|. \qquad (3)$$

$N(x_2; y_2)$ nöqtəsi həm də KL üzərində olduğundan $Ax_2 + By_2 + C = 0$ yazmaq olar. (2)-ni nəzərə alaq:

$$A(x_1 + At) + B(y_1 + Bt) + C = (Ax_1 + By_1 + C) + t(A^2 + B^2) = 0$$

və buradan da

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}$$

alınır. Onda (3)-dən

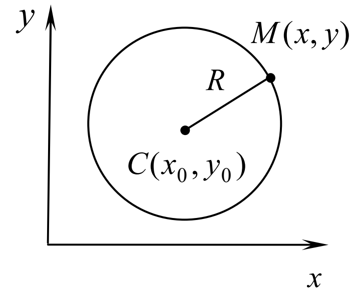
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (4)$$

alarıq. (4) düsturu $M(x_1; y_1)$ nöqtəsindən $Ax + By + C = 0$ düz xəttinə qədər olan d məsafəsini hesablamaq üçün düsturdur.

MÜHAZİRƏ 3,4
İKİTƏRTİBLİ ƏYRİLƏR

Cevrə

$C(x_0; y_0)$ mərkəzli və R radiuslu çevrənin tənliyini alaq. Bu məqsədlə çevrə üzərində ixtiyari $M(x; y)$ nöqtəsi götürək. Onda

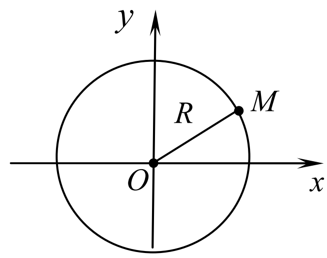


$$MC = R$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (1)$$

tənliyini alırıq. (1) tənliyi mərkəzi $(x_0; y_0)$ nöqtəsində yerləşən və radiusu R ədədinə bərabər olan ***çevrənin tənliyi***dir.

Xüsusi halda, çevrənin mərkəzi $O(0;\ 0)$ koordinat başlanğıcında yerləşərsə, (1) tənliyi



$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (3)$$

şəklinə düşür ki, bu da mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən və radiusu R-ə bərabər olan ***çevrənin tənliyi***dir.

Ellips

Ellips dedikdə müstəvinin elə nöqtələrinin həndəsi yeri başa düşülür ki, bu nöqtələrin müstəvinin verilmiş iki nöqtəsindən olan məsafələri cəmi sabit olsun. Həmin verilmiş iki nöqtəyə ellipsin ***fokusları*** deyilir.

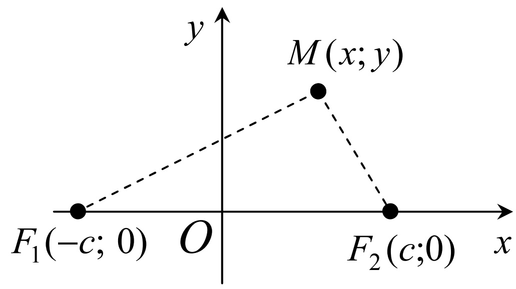
Ellipsin fokuslarını F_1 və F_2 ilə işarə edirlər. Ellipsin ən sadə formada tənliyini almaq üçün koordinat oxlarını elə yerləşdirək ki, O koordinat başlanğıcı F_1F_2 parçasının orta nöqtəsi olsun; Ox oxu F_1F_2-dən keçən düz xətt, OY oxu isə O nöqtəsində çəkilən perpendikulyar olsun. Ellips üzərində götürülmüş istənilən M nöqtəsinin koordinatları $(x;\ y)$ olsun. Tərifə görə MF_1+MF_2 sabitdir. Bu sabiti $2a$ ilə işarə edək:

$$MF_1+MF_2=2a. \qquad (1)$$

Fokuslar arasındakı məsafə 2*c* olsun: $F_1F_2=2c$.

Aydındır ki, $a>c$. Çünki, $2a$ ΔMF_1F_2 –in 2 tərəfinin cəmidir, $2c$ isə 1 tərəfidir. Yəni, $MF_1+MF_2>F_1F_2$, $2a>2c$ olduğundan $a>c$ olar.

Aydındır ki, seçilmiş koordinat sistemi n-də $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ olar. Verilmiş iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə yaza bilərik:



$$MF_1^2=(x+c)^2+y^2,$$
$$MF_2^2=(x-c)^2+y^2.$$

Onda (1) münasibətinə görə yaza bilərik:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Hər tərəfi kvadrata yüksəldib elementar çevirmələr aparaq:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+y^2$$

$$4xc=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a^2-xc=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(a^2-xc)^2=a^2((x-c)^2+y^2)$$

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2)$$

$$\frac{y^2}{a^2-c^2}+\frac{x^2}{a^2}=1. \qquad (2)$$

$a>c$ olduğundan $a^2-c^2=b^2$ işarə edə bilərik ($b>0$). Bu işarələmə daxilində (2) münasibəti aşağıdakı şəklə düşər:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

(3) ellipsin ən sadə formada tənliyidir. Bu tənliyə ***ellipsin kanonik tənliyi*** deyilir.

İndi ellipsin formasını aydınlaşdıraq.(3) münasibətindən alınır ki,

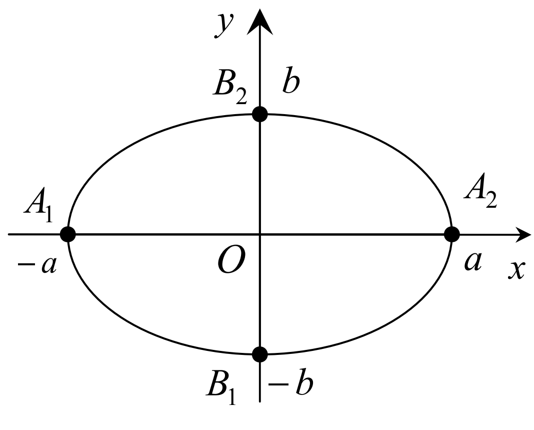
$$\frac{x^2}{a^2} \le 1, \ \frac{y^2}{b^2} \le 1 \ \Rightarrow x^2 \le a^2, \ \ y^2 \le b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a \le x \le a, \ -b \le y \le b$$

(3) münasibətindən görünür ki, x-in yerinə $-x$, y-in yerinə $-y$ yazdıqda tənlik dəyişmir. Ona görə də əgər hər hansı $M(x_0;\ y_0)$ nöqtəsinin koordinatları (3)-ü ödəyirsə, deməli $M'(-x_0;\ y_0)$, $M''(x_0;\ -y_0)$, $M'''(-x_0;\ -y_0)$ nöqtələri də ödəyir. Yəni hər hansı $M(x_0;\ y_0)$ nöqtəsi ellipsin üzərindədirsə, onda onunla absis oxuna, ordinat oxuna və koordinat başlanğıcına görə simmetrik olan nöqtələr də onun üzərindədir. Başqa sözlə, (3) tənlikli ellips absis və ordinat oxlarına nəzərən simmetrikdir; absis və ordinat oxları (3) tənlikli ellipsin simmetriya oxlarıdır. Ona görə də, bu ellipsi, əvvəlcə, İ rübdə qurmaq, sonra isə simmetriyaya görə qalan rüblərdə davam etdirmək olar. (3)-ü y-ə nəzərən həll edək

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

I rübdə $0 \le x \le a, \ y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ olar; $x=0$ olduqda $y=b$, $x=a$ olduqda isə $y=0$ olur; x artdıqca y azalır. Bu deyilənlərə əsasən ellipsi I rübdə qururuq və sonra simmetriyaya görə qalan rüblərdə davam etdiririk.



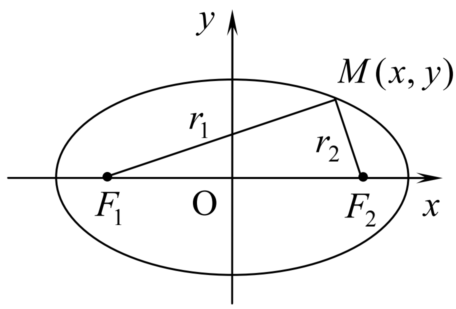
Ellipsə aid əsas anlayışlarla tanış olaq. Ellipsin simmetriya oxlarının A_1A_2 və B_1B_2 parçalarına, başqa sözlə, $2a$ və $2b$-yə ellipsin uyğun olaraq, *böyük* və *kiçik oxları* deyilir ($b^2 = a^2 - c^2$ olduğundan $b < a$). a və b-yə isə, adətən, ellipsin *böyük* və *kiçik yarımoxları* deyilir. Ellipsin simmetriya oxlarının kəsişmə nöqtələrinə ellipsin *mərkəzi* deyilir. Ellipsin böyük və kiçik oxlarının uclarına ellipsin *təpələri* deyilir.

Aydındır ki, b a-dan nə qədər çox kiçikdirsə, onda ellips daha uzunsov olur; b a-ya nə qədər yaxındırsa, ellips çevrəyə bir o qədər yaxın olur. Ona görə də ellipsin forması *b/a* nisbətindən asılıdır. Lakin analitik həndəsədə daha çox *b/a* nisbətindən yox, *c/a* nisbətindən istifadə olunur. *c/a* nisbətinə, yəni fokuslar arasındakı məsafənin yarısının ellipsin böyük yarımoxuna nisbətinə ellipsin *ekssentrisiteti* deyilir və ε ilə işarə olunur:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\ .$$

Son ifadədən göründüyü kimi, ε 0-a nə qədər yaxındırsa (*b/a* nisbəti vahidə yaxın olduqca) ellips çevrəyə bir o qədər yaxın olur. Qeyd edək ki, $0<c<a$ olduğundan $0<\varepsilon<1$ olar.

Ellips üzərində götürülmüş hər hansı $M(x;\ y)$ nöqtəsindən fokuslara qədər olan MF_1, MF_2 məsafələri həmin nöqtənin *fokal radiusları* adlanır və uyğun olaraq r_1, r_2 ilə işarə olunur:



$$r_1 = a + \varepsilon x,$$
$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

Aydındır ki, $r_1 + r_2 = 2a$.

Hiperbola

Hiperbola dedikdə müstəvinin elə nöqtələrinin həndəsi yeri başa düşülür ki, bu nöqtələrin müstəvinin verilmiş iki nöqtəsindən olan məsafələri fərqi sabit olsun. Həmin verilmiş iki nöqtəyə hiperbolanın *fokusları* deyilir və F_1, F_2 ilə işarə olunur.

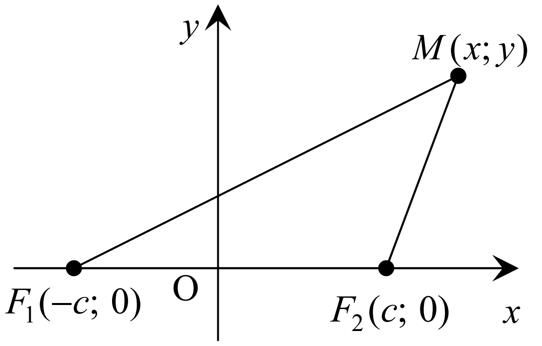
I. Hiperbolanın ən sadə formada tənliyini almaq üçün koordinat sistemini F_1, F_2 fokuslarına nəzərən ellipsdə olduğu kimi yerləşdirək. $2c$ ilə fokuslar arasındakı məsafəni işarə etsək, $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ olar. Hiperbola üzərində istənilən $M(x;\ y)$ nöqtəsi götürək. Hiperbolanın tərifinə görə MF_1 və MF_2 məsafələrinin fərqi sabitdir. Bu sabiti $2a$ ilə işarə edək. Aydındır ki, M nöqtəsi I, IV rüblərdə olarsa,

$$MF_1 - MF_2 = 2a, \qquad (1)$$

II, III rüblərdə yerləşən $M(x; y)$ nöqtəsi üçün isə

$$MF_2 - MF_1 = 2a \qquad (2)$$

olar. Qeyd edək ki, ellipsdən fərqli olaraq, hiperbolada $2a<2c$ ($2a$ üçbucağın 2 tərəfinin fərqi, $2c$ – üçbucağın bir tərəfi), yəni $a<c$ olur. (1) və (2) nəticələrini birləşdirsək ümumi hal üçün



$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a, \qquad (3)$$

və yaxud

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

olduğunu alarıq.

Ellipsdə olduğu kimi analoji çevirmələr aparsaq, yekunda belə bir tənlik alarıq:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Lakin burada $a<c$ olduğundan c^2-a^2=b^2>0 (b>0) işarə etsək, tənlik belə olar:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

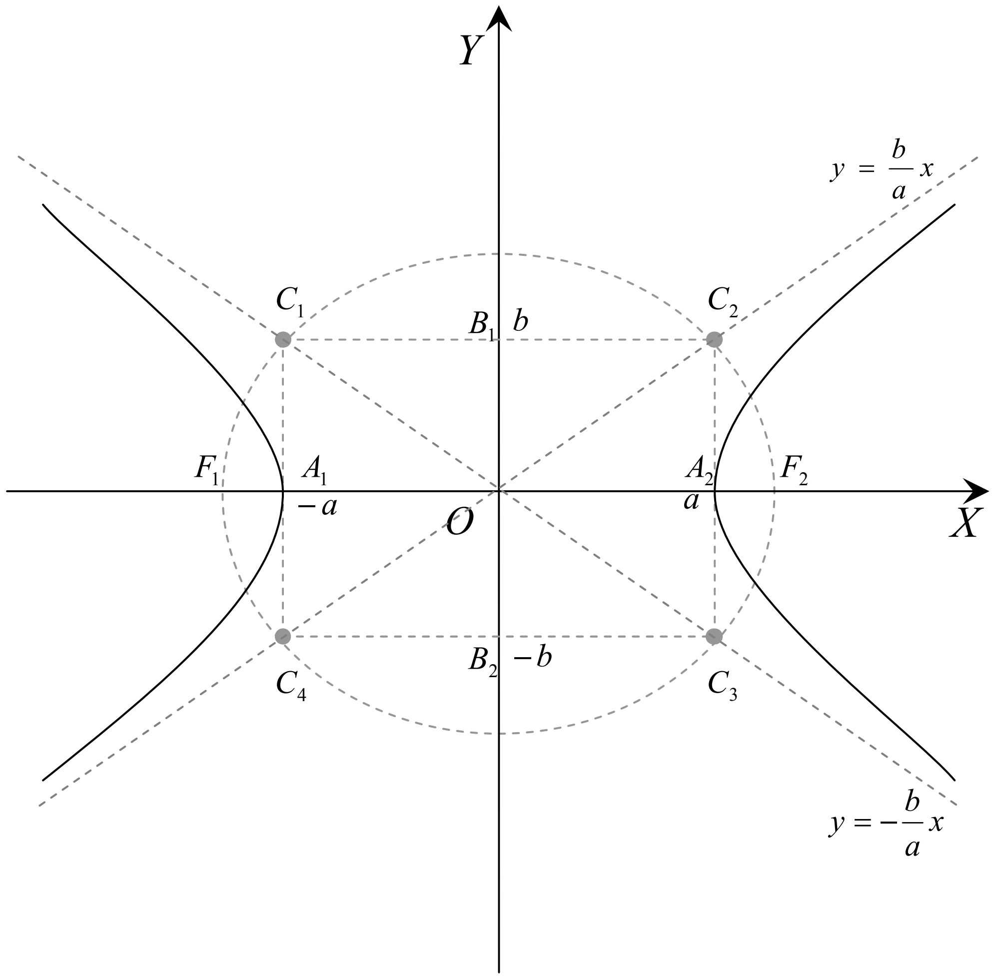
Bu, hiperbolanın ən sadə formada tənliyidir. (4) hiperbolanın *kanonik tənliyi* adlanır.

II. (4) tənliyi ilə verilən hiperbolanın formasını müəyyən edək. Əvvəlcə qeyd edək ki, $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1$ olduğundan

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow |x| \geq a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -a \\ x \geq a \end{array}\right.$$

olar.

Daha sonra x və y (4)-ə ikinci dərəcədən daxil olduqlarına görə ellipsdə olduğu kimi, buruda da ala bilərik ki, koordinat oxları (4) tənlikli hiperbolanın da simmetriya oxlarıdır. Ona görə də hiperbolanı birinci rübdə qurub, sonra simmetriyaya görə qalan rüblərdə davam etdirə bilərik.



(4) ifadəsindən alınır ki, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Birinci rübdə y müsbət olduğundan $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ olar (y>0, $x \geq a$). Buradan görünür ki, x=a olduqda y=0 olur; x artdıqca y artır və həmişə $y = \frac{b}{a}x$ düz xəttindən aşağıda qalır, lakin ona sonsuz olaraq yaxınlaşır. Doğrudan da, hiperbolanın və $y = \frac{b}{a}x$ düz xəttinin hər hansı eyni bir x absisinə uyğun ordinatları arasındakı fərqi δ_X ilə işarə etsək, yaza bilərik:

$$\delta_x = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{a} =$$
$$= \frac{b(x^2 - (x^2 - a^2))}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Alınan nəticədən görünür ki, x sonsuz olaraq artdıqda δ_X müsbət qalaraq 0-a yaxınlaşır. Yəni hiperbolanın I rübdəki qolu x sonsuz artdıqda $y = \frac{b}{a}x$ düz xətti-nə sonsuz olaraq yaxınlaşır. Belə $y = \frac{b}{a}x$ düz xəttinə hiperbola əyrisinin *asimptotu* deyilir. Simmetriyaya görə $y = -\frac{b}{a}x$ düz xətti də hiperbolanın asimptotudur. Fokusları göstərmək üçün $c^2=a^2+b^2$ olduğunu yada salaq; c – şəkildəki $C_1C_2C_3C_4$ düzbucaqlısının diaqonalının yarısına bərabərdir.

III. Hiperbolaya aid əsas anlayışlarla tanış olaq.

A_1A_2 – hiperbolanın həqiqi oxu ($2a$), B_1B_2 – hiperbolanın xəyali oxu ($2b$),

a – həqiqi yarımox, b – xəyali yarımox,

A_1, A_2 – hiperbolanın təpələri, O – hiperbolanın mərkəzi,

$C_1C_2C_3C_4$ – hiperbolanın ox düzbucaqlısı adlanır.

Hiperbolanın *ekssentrisiteti:*

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \Rightarrow \varepsilon > 1$$

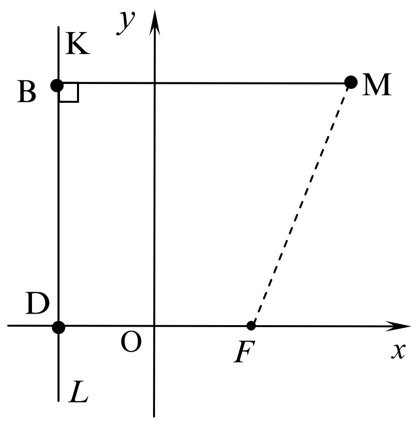
Xüsusi halda $a=b$ olduqda hiperbola bərabəroxlu hiperbola olur ($x^2 - y^2 = a^2$). Hiperbolanın ekssentrisiteti vahidə yaxın olduqca (başqa sözlə, *b/a 0*-a yaxın olduqca) hiperbola daha uzunsov olur.

Parabola

Parabola dedikdə müstəvinin elə nöqtələrinin həndəsi yeri başa düşülür ki, bu nöqtələrin müstəvinin verilmiş düz xəttindən və verilmiş nöqtəsindən olan məsafələri bir-birinə bərabər olsun. Müstəvinin verilmiş bu düz xəttinə parabolanın *direktirisi*, verilmiş nöqtəsinə isə parabolanın *fokusu* deyilir. Parabolanın fokusunu adətən F ilə işarə edirlər.

Fərz edək ki, KL parabolanın direktirisi, M isə onun üzərində götürülmüş hər hansı nöqtədir. $MB \perp KL$ çəkək. Tərifə görə $MB = MF$ olmalıdır. $FD \perp KL$,

$FD = p$ olsun. p – fokusdan direktrisə qədər olan məsafədir, parabolanın *parametri* adlanır.



Parabolanın ən sadə formada tənliyini çıxarmaq üçün koordinat sistemini belə yerləşdirək: koordinat başlanğıcı FD parçasının O orta nöqtəsi, absis oxu FD-ni özündə saxlayan düz xətt (müsbət istiqamət olaraq O-dan F-ə doğru) olsun, $Oy \perp Ox$.

Onda aydındır ki, bu koordinat sistemində F fokusunun koordiantları $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, KL direktrisinin tənliyi $x = -\frac{p}{2}$ olar. Parabola üzərində yerləşən ixtiyari $M(x;\ y)$ üçün $MB=MF$ olduğundan yaza bilərik**:**

$$MB^2 = MF^2,\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + px + x^2 = x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

və ya

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

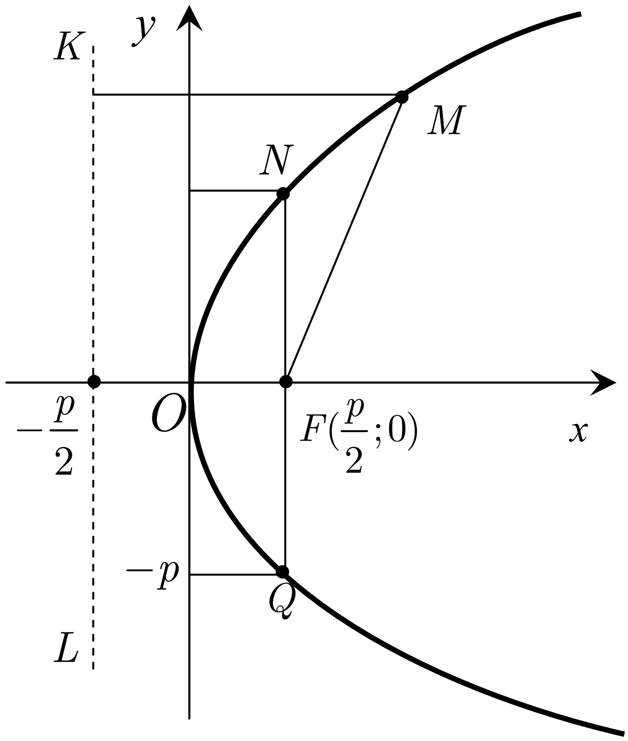
(1) münasibəti *parabolanın kanonik tənliyi* adlanır.

İndi (1) tənlikli parabolanın formasını müəyyənləşdirək. $y^2 = 2px$ olduğundan $x = \frac{y^2}{2p}$ olar. Buradan isə alırıq ki, $x \geq 0$. Ona görə də parabola əyrisi I və IV rüblərdə yerləşir.

(1) münasibətinə y dəyişəni ikinci dərəcədən daxil olduğuna görə parabola əyrisi Ox oxuna nəzərən simmetrik olmalıdır (çünki, hər hansı $(x_0,\ y_0)$ nöqtəsi parabola üzərində olarsa, $(x_0,\ -y_0)$ nöqtəsi də parabola üzərində olar). Ox oxu (1) tənlikli parabolanın *simmetriya oxu* olduğuna görə onu əvvəlcə I rübdə quraq, sonra isə simmetriyaya görə IV rübə davam etdirək.

(1) münasibətinə görə $y = \pm\sqrt{2px}$.

I rübdə $y \geq 0$ olduğundan $y = \sqrt{2px}$ olmalıdır ($x \geq 0$). $x = 0$ olduqda $y = 0$ olar ((0; 0) nöqtəsi *parabolanın təpə nöqtəsi* adlanır) və x artdıqca, y də artır. Qeyd edək ki, $x = \frac{p}{2}$ olduqda $y^2 = 2px = p^2$ və ya $y = \pm p$ olur. Deməli, $\left(\frac{p}{2};\ p\right)$, $\left(\frac{p}{2};\ -p\right)$ nöqtələri parabola üzərindədir. Ona görə də parabolanın fokusundan keçib, parabolanın simmetriya oxuna perpendikulyar olan NQ vətərinin uzunluğu $2p$ olar.



(1) münasibətində x və y-in yerini dəyişsək, $x^2 = 2py$ olar. Onda simmetriya oxu Oy olar.

Qeyd edək ki, yeganə simmetriya mərkəzi olan əyrilər *mərkəzi əyrilər* adlanır. Simmetriya mərkəzi olmayan ikitərtibli əyrilər *mərkəzi olmayan əyrilər* adlanır. məsələn, çevrə, ellips, hiperbola ikitərtibli mərkəzi əyrilər, parabola isə mərkəzi olmayan ikitərtibli əyridir.

MÜHAZİRƏ 5, 6
İKİTƏRTİBLİ VƏ ÜÇTƏRTİBLİ DETERMİNANTLAR.

İkitərtibli determinant anlayışı.
İkidəyişənli iki xətti tənliklər sistemi üçün Kramer qaydası.

İkitərtibli determinant dedikdə

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{1}$$

ifadəsi başa düşülür; burada a_1, a_2, b_1, b_2 ifadələri *determinantın elementləri* adlanır. Bu elementlər *determinantın sıraları* adlanan 2 sətir və 2 sütununda yerləşir. İkitərtibli determinantın köməyi ilə

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{2}$$

şəkilli ikidəyişənli iki xətti tənliklər sistemini həll etmək rahat olur. (2) sisteminin həllini tapmaq üçün onun birinci tənliyinin hər tərəfini b_2-yə, ikinci tənliyinin hər tərəfini b_1-yə vurub tərəf-tərəfə toplayaq:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\ x = c_1b_2 - c_2b_1 \tag{3}$$

Analoji qayda ilə almaq olar ki,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\ y = -\ c_1\ a_2 + \ c_2\ a_1 \tag{4}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

determinantina (2) sisteminin *baş determinantı*,

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

determinantlarına isə *köməkçi determinantları* deyilir. Bu münasibətlər daxilində

(3) və (4) münasibətləri aşağıdakı şəkildə olar:

$$Dx = D_x$$

$$Dy = D_y.$$

Əgər, $D \neq 0$ olarsa , (2) sisteminin yeganə həlli var:

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D}. \qquad (5)$$

(5) düsturlarına *Kramer düsturları* deyilir. $D=0$ olarsa (2) sisteminin ya həlli yoxdur (*sistem uyuşmayandır*), ya da sonsuz sayda həlli var (*sistem qeyri-müəyyəndir*). Bu halda sistemə ayrıca baxılır. Məsələn,

$$\begin{cases} 7x - 6y = 5 \\ 8x - 7y = -10 \end{cases}$$

tənliklər sistemini Kramer qaydası ilə həll edək.

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -49 + 48 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = -35 - 60 = -95$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = -70 - 40 = -110$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-95}{-1} = 95$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-110}{-1} = 110$$

Cavab: (95; 110).

Üçdəyişənli iki xətti bircins tənliklər sistemi

Aşağıdakı kimi üçdəyişənli iki xətti bircins tənliklər sisteminə baxaq:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

Burada x, y, z – dəyişənlər, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – məlum ədədlərdir.

(1) sisteminin həmişə həlli var, belə ki, məsələn $x=0,\ y=0,\ z=0$ həlli bu sistemin həllidir (sıfır həll). (1)-in sıfırdan fərqli həllinin tapılmasına baxaq. Sadəlik üçün tutaq ki, $z\neq0$. Onda, (1)-dən alınır ki,

$$\begin{cases} a_1\dfrac{x}{z}+b_1\dfrac{y}{z}=-c_1 \\ a_2\dfrac{x}{z}+b_2\dfrac{y}{z}=-c_2 \end{cases}$$

Əgər, $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ olarsa,

$$\frac{x}{z}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(1)-in *əmsalları matrisini* düzəldək:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

$D_1,\ D_2,\ D_3$ ilə matrisin uyğun sütununun silinməsindən alınan ikitərtibli determinantları işarə edək:

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Onda $D_3\neq0$ olduğunu fərz etsək,

$$\frac{x}{z}=\frac{D_1}{D_3},\ \frac{y}{z}=-\frac{D_2}{D_3}\Rightarrow\frac{x}{D_1}=\frac{z}{D_3},\ -\frac{y}{D_2}=\frac{z}{D_3}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{D_1}=-\frac{y}{D_2}=\frac{z}{D_3} \tag{2}$$

Aydındır ki, (2) bərabərlikləri (0; 0; 0) həlli üçün də doğrudur. Mütənasiblik əmsalını t ilə işarə edək. Onda

$$\frac{x}{D_1}=-\frac{y}{D_2}=\frac{z}{D_3}=t$$

$$x=D_1t,\ \ y=-D_2t,\ \ z=D_3t\ \ (-\infty<t<+\infty) \tag{3}$$

alarıq. Qeyd edək ki, (3) düsturlarını çıxararkən $D=D_3\neq 0$ olduğunu fərz etmişdik. Lakin asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu düsturlar D_1, D_2, D_3-dən istənilən biri (heç olmasa biri) sıfırdan fərqli olanda da doğrudur.

$D_1=D_2=D_3=0$ olarsa, sistem ayrıca araşdırılmalıdır.

Misal: $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 4x+5y-6z=0 \end{cases}$ sistemini həll edək. Əmsallar matrisi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}=12-15=-3$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=-6-12=-18$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=5+8=13$$

Onda (3) düsturlarına görə yaza bilərik:

$$x=-3t,\ y=18t,\ z=13t\ (-\infty<t<+\infty).$$

Deməli, verilmiş sistemin sonsuz sayda həlli var və bu həllər $(-3t;\ 18t;\ 13t)$, $t\in R$ şəklindədir.

Cavab: $(-3t;\ 18t;\ 13t)$, $t\in R$.

Üçtərtibli determinant anlayışı. Ayırma teoremi.

Üçtərtibli determinant dedikdə

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1)$$

ifadəsi başa düşülür; burada a_n, a_{12},.., a_{33} (qısa a_{ij}, $i=\overline{1,3}$; $j=\overline{1,3}$) ədədlərinə üçtərtibli determinantın *elementləri* deyilir. Bu elementlər üçtərtibli determinantın *sıraları* adlanan üç sətir və üç sütununda yerləşir. Göründüyü kimi elementin indeksindəki birinci ədəd sətrin nömrəsini, ikinci ədəd isə sütunun nömrəsini göstərir. Məsələn, a_{23} – ikinci sətir, üçüncü sütunda dayanan elementdir.

Misal: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ determinantını hesablayaq.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (15-16) - 2(10-12) + 3(8-9) = 0$$

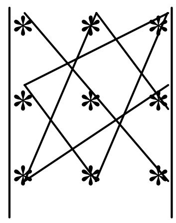
Cavab: 0.

(1) də ikitərtibli determinantları açsaq, görərik ki, üçtərtibli determinant altı toplananın cəmi şəklində göstərilir: üçü müsbət, üçü mənfi işarəsi ilə:

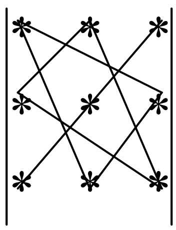
$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{11}a_{32}-a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Bu toplananları aşağıdakı qayda (üçbucaq qaydası) ilə yadda saxlamaq olar:

müsbət işarəsi ilə götürülən toplananlar



mənfi işarəsi ilə götürülən toplananlar



İndicə baxdığımız misaldakı determinantı bu qayda ilə də hesablayaq:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot3+2\cdot4\cdot3-3\cdot3\cdot3-2\cdot2\cdot5-4\cdot4\cdot1=15+24+24-27-20-16=0$$

(1) determinantın hər hansı a_{ij} elementinin *minoru* dedikdə bu determinantın i-ci sətrini və j-cu sütununu sildikdən sonra alınan ikitərtibli determinant başa düşülür və M_{ij} ilə işarə olunur. (1) determinantın a_{ij} elementinin *cəbri tamam-*

layıcısı dedikdə onun M_{ij} minorunun $(-1)^{i+j}$-yə hasili başa düşülür və A_{ij} ilə işarə olunur:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3.$$

Məsələn, baxdığımız misaldakı determinantın ikinci sətir, birinci sütununda dayanan «2» elementinin cəbri tamamlayıcısı:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2,$$

minoru isə M_{21}=–2-dir.

İndi (1) determinantını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Bu ifadəyə üçtərtibli determinantın birinci sətir üzrə ayrılışı deyilir. Deməli, üçtərtibli determinant onun birinci sətir elementlərinin bu elementlərin cəbri tamamlayıcıların olan hasilləri cəminə bərabərdir.

Teorem (***ayırma teoremi***). Üçtərtibli determinant onun hər hansı sətir və ya sütun elementlərinin bu elementlərin cəbri tamamlayıcılarına olan hasilləri cəminə bərabərdir:

$$\begin{aligned} D&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},\\ D&=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23},\\ D&=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33},\\ D&=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31},\\ D&=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32},\\ D&=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}. \end{aligned} \tag{2}$$

Bu altı düstur üç sətir və üç sütun üzrə ayrılış düsturlarıdır.Asanlıqla yoxlamaq olar ki, (2) ifadələrinin hamısı tərifdəki (1) ifadəsini verir və beləliklə də (2) düsturlarının doğruluğunu almaq olar.Beləliklə, hər hansı üçtərtibli determinantı hesablamaq üçün təkcə birinci sətir üzrə ayrılış düsturundan deyil, hər hansı başqa əlverişli sətir və ya sütun elementləri üzrə ayrılış düsturlarından da istifadə etmək olar.

Misal. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ determinantını əlverişli sıra üzrə ayıraraq hesablayaq.

Əlverişli sıra kimi ikinci sətri götürə bilərik.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 0 = -4(10-14) + 3(5-21) = -32$$

Cavab: –32.

Determinantların əsas xassələri

Determinantların əsas xassələrini formulə edərkən onların tərtibini göstərməyəcəyik. Çünki, bu xassələr istənilən tərtibli determinantlar üçün doğrudur.

***Xassə* 1.** (*sətir, sütunların eynihüquqluluğu xassəsi*): Determinantın bütün sətirləri uyğun sütunları ilə əvəz olunarsa, onun qiyməti dəyişməz.

Məsələn, üçtərtibli determinant üçün bu o deməkdir ki,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Doğrudan da, sol tərəfdəki determinantı birinci sətir, sağ tərəfdəki determinantı isə birinci sütun üzrə ayırsaq, onların bərabər olduğunu alarıq.

***Xassə* 2.** Determinantın iki paralel sırasının yerini dəyişdikdə onun mütləq qiyməti olduğu kimi qalır, işarəsi isə əksinə dəyişir.

İsbatı. Tutaq ki, məsələn,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinantında I və II sətir elementlərinin yeri dəyişib:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

İsbat edək ki, $D_1=-D$.

D-ni I sətir, D_1-i isə II sətir üzrə ayıraq:

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13},$$

$$D_1=a_{11}(-1)^{2+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{2+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{2+3}M_{13}=-a_{11}M_{11}+a_{12}M_{12}-a_{13}M_{13}=-D.$$

Beləliklə aldıq ki, $D_1=-D$

***Xassə* 3.** Determinantın iki paralel sırası eyni olarsa, belə detrminant 0-a bərabərdir.

***İsbatı*.** Tutaq ki,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinantina baxılır. Göründüyü kimi, bu determinantın I və II sətir elementləri eynidir. I və II sətrin yerini dəyişsək, alınmış determinant əvvəlki xassəyə görə $-D$-yə bərabər olar. Lakin bu determinant, həm də, əvvəlki determinantdır. Deməli, $D=-D$. Buradan isə alırıq ki, $D=0$.

Növbəti xassələri isbatsız verək

***Xassə* 4.** Determinantın hər hansı sırasının elementlərinin ortaq vuruğunu determinant işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

***Nəticə* 1.** Determinantın hər hansı sırasının bütün elementləri 0 olarsa, belə determinant 0-a bərabərdir.

Nəticə 2. Əgər determinantın hər hansı sırasının elementləri ona paralel sıranın uyğun elementləri ilə mütənasib olarsa, belə determinant 0-a bərabərdir.

Doğrudan da,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot 0=0$$

***Xassə* 5.** Əgər determinantın hər hansı sırasının elementləri iki toplananın cəmi şəklində göstərilibsə, onda bu determinant iki uyğun determinantın cəminə bərabərdir.

***İsbatı*.** Tutaq ki, determinant aşağıdakı şəkildədir:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}^{/} & a_{12}+a_{12}^{/} & a_{13}+a_{13}^{/} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$=(a'_{11}+a_{11})A_{11}+(a'_{12}+a_{12})A_{12}+(a'_{13}+a_{13})A_{13}=$$

$$=(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{21}+a_{13}A_{13})+(a'_{11}A_{11}+a'_{12}A_{21}+a'_{13}A_{13}) =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{/} & a_{12}^{/} & a_{13}^{/} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nəticə. Əgər determinantın hər hansı sırasının elementləri üzərinə ona paralel sıranın uyğun elementləri ilə mütənasib olan ədədlər əlavə olunarsa, determinantın qiyməti dəyişməz.

Bu o deməkdir ki, məsələn:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Xassə 6. Determinantın hər hansı sırasının elementlərinin ona paralel sıranın uyğun elementlərinin cəbri tamamlayıcılarına olan hasilləri cəmi *0*-a bərabərdir.

Başqa sözlə, məsələn,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinantı üçün:

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0,$$

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0 \text{ və s.},$$

həmçinin:

$$a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}=0,$$

$$a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}=0 \text{ və s.}$$

ödənilir.

Üçdəyişənli üç xətti tənliklər sistemi. Kramer qaydası.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases} \tag{1}$$

sisteminə baxaq; burada *x, y, z* – dəyişənlər, a_{ij}, i,j=1,3-əmsallar, d_1, d_2, d_3 – sərbəst hədlərdir.

(1) sisteminin həlli dedikdə *x, y, z* dəyişənlərinin elə qiymətləri üçlüyü başa düşülür ki, bu üçlük həmin sistemi ödəsin.

(1) sisteminin

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

baş determinantını və

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}$$

köməkçi determinantlarını daxil edək.

(1) tənliklərinin birincisini A_{11}-ə, ikincisini A_{21}-ə, üçüncüsünü A_{31}-ə vurub tərəf-tərəfə toplayaq:

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})y+$$
$$+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})z=d_1A_{11}+d_2A_{21}+d_3A_{31}. \tag{2}$$

Əvvəlki başlıqda tanış olduğumuz determinantın VI xassəsinə görə (2) münasibətində y və z-in qarşısındakı əmsallar 0-a bərabərdir. Ona görə də (2)-dən alırıq ki,

$$Dx=D_x.$$

Analoji qayda ilə ala billərik ki,

$$Dy=D_y,\ Dz=D_z.$$

Beləliklə, alırıq ki, əgər (1) sisteminin baş determinantı $D\neq 0$ olarsa, onda bu sistemin yeganə həlli var və bu həll aşağıdakı düsturlarla təyin olunur:

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D},\ z = \frac{D_z}{D} \tag{3}$$

(3) düsturları (1) sisteminin həlli üçün *Kramer qaydası* adlanır.

Qeyd: *D=0* olarsa, (1) sisteminin ya həlli yoxdur (uyuşmayandır), ya da sonsuz sayda həlli var (qeyri-müəyyən sistem).

Misal: $\begin{cases} 3x - y + 5z = 2 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$ sistemini həll edək.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-8+3) + (-12+1) + 5(9-2) = 9 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-8+3) = -10$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -2(-12+1) = 22$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(9-2) = 14$$

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{10}{9}, y = \frac{D_y}{D} = \frac{22}{9}, z = \frac{D_z}{D} = \frac{14}{9}.$$

Cavab: $\left(-\frac{10}{9}, \frac{22}{9}, \frac{14}{9}\right)$.

Üçdəyişənli üç xətti bircins tənliklər sistemi

Üçdəyişənli üç xətti bircins tənliklər sisteminə baxaq

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Sistemin hər bir tənliyi xəttidir, bircinsdir; sistem üçdəyişənlidir (ayrı-ayrı tənliklərdə dəyişənlərin sayı az ola bilər).

Aydındır ki, (1) sisteminin həmişə $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, yəni (0, 0, 0) həlli var. Deməli, (1) sistemi həmişə uyuşandır. Görəsən sistemin nə vaxt sıfırdan fərqli həlli var?

Teorem. Üçdəyişənli üç xətti bircins tənliklər sisteminin yalnız və yalnız o vaxt sıfır olmayan həlli var ki, onun baş determinantı 0-a bərabər olsun:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

***İsbatı*:** 1) Tutaq ki, (1)-in sıfır olmayan (x_1, y_1, z_1) həlli var. İsbat edək ki, D=0. Əksini fərz edək ki, Tutaq ki, D≠0. Onda (1)-in həlli Kramer qaydasına görə yeganə olar. Lakin (1)-in həm (0; 0; 0), həm də sıfır olmayan (x_1, y_1, z_1) həlli var. Ziddiyyət alınır. Deməli, D=0 olmalıdır.

2) Tutaq ki, (1) üçün D=0. İsbat edək ki, (1)-in sıfır olmayan həlli var. Doğrudan da, D=0 olarsa, (1)-in ya həlli yoxdur, ya da varsa da, yeganə deyil. Lakin (1) sistemi uyuşandır (heç olmasa, (0; 0; 0) həlli var). Deməli, (1)-in həlli var, yeganə deyil. Ona görə də (1)-in sıfır olmayan həlli də var.

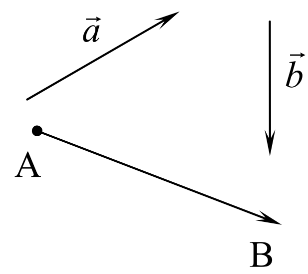
MÜHAZİRƏ 7, 8
VEKTORLAR CƏBRİNİN ELEMENTLƏRİ.

Skalyar və vektorial kəmiyyətlər

Seçilmiş vahidlər sistemində yalnız özünün ədədi qiyməti ilə tamamilə xarakterizə olunan kəmiyyətə *skalyar kəmiyyət* deyilir. Məsələn, kütlə, temperatur, həcm və s. – skalyar kəmiyyətlərdir.

Ədədi qiymətindən başqa istiqaməti ilə də xarakterizə olunan kəmiyyətlərə *vektorial kəmiyyətlər* və ya *vektorlar* deyilir. Məsələn, qüvvə, sürət, yerdəyişmə və s.

Vektorları, adətən, kiçik hərflərlə, məsələn, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və s. kimi, və ya böyük hərflərlə, məsələn, $\overrightarrow{AB}$ kimi işarə edirlər (burada A vektorun başlanğıcı, B isə sonudur). Bundan sonra isə əyanilik üçün vektorlara istiqamənlənmiş parçalar kimi baxacağıq.



$\vec{a}$ vektorunun *modulu* (uzunluğu) dedikdə onun ədədi qiyməti başa düşülür və $|\vec{a}|$ ilə işarə olunur.

Modulu 0-a bərabər olan (istiqaməti ixtiyari olan) vektora *sıfır vektor* deyilir və $\vec{0}$ kimi işarə olunur.

Əgər iki vektor eyni bir düz xətt və ya 2 paralel düz xətt üzərində olmaqla eyni uzunluğa və eyni istiqamətə malik olarsa, belə vektorlara *bərabər vektorlar* deyilir. Bundan sonra bərabər vektorları fərqləndirməyəcəyik. Onlara bir sərbəst vektor kimi baxacağıq. Xüsusi halda sərbəst vektorlar üçün ortaq başlanğıc da seçə bilərik (bundan sonra vektorlara fəzada baxacağıq).

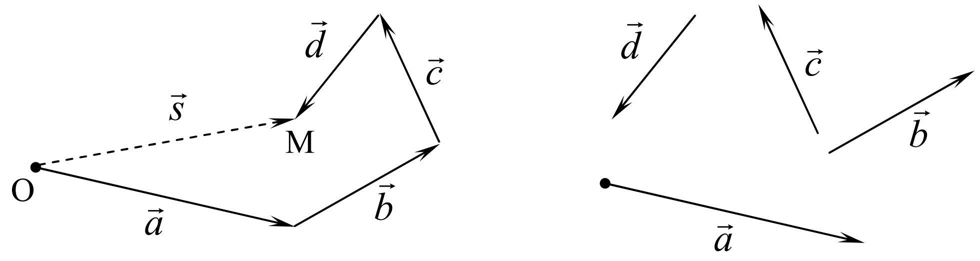
Vektorların cəmi və fərqi

Bir neçə vektorun, məsələn, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektorlarının cəmi dedikdə elə

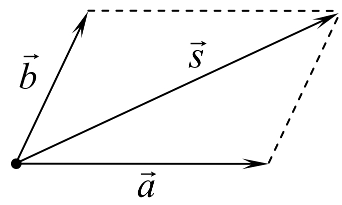
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

vektoru başa düşülür ki, bu vektorun uzunluğu və istiqaməti verilmiş vektorlar üzərində qurulmuş uyğun sınıq xəttin başlanğıc və uc nöqtələrini birləşdirən $\overrightarrow{OM}$

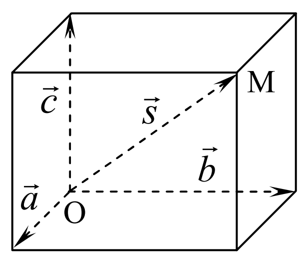
vektorunun uzunluğu və istiqaməti ilə eyni olsun:



İki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektoru üçün onların $\vec{s}$ cəmi bu vektorlar üzərində qurulmuş paraleloqramın diaqonalıdır (paraleloqram qaydası).



Üç $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektoru üçün onların $\vec{s}$ cəmi bu vektorlar üzərində qurulmuş paralelepipedin $\overrightarrow{OM}$ dioqanalına bərabərdir (parallelepiped qaydası).



Asanlıqla yoxlamaq olar ki, vektorların toplanması üçün aşağıdakı xassələr doğrudur:

1) yerdəyişmə xassəsi:

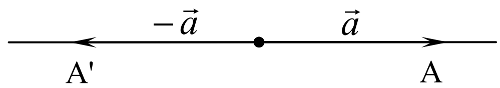
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$$

2) qruplaşdırma xassəsi:

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c};$$

3) hər bir $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ vektoru üçün onunla eyni uzunluqlu, əksistiqamətli $-\vec{a}=\overrightarrow{OA'}$ vektoru var.

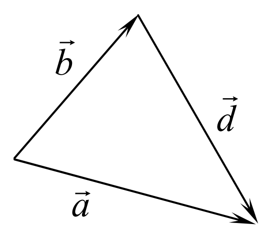
Aydındır ki, $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.



4) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

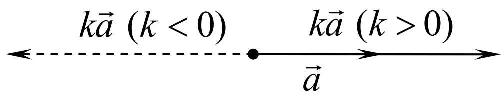
İki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorunun fərqi dedikdə elə $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ vektoru başa düşülür ki, $\vec{b}+\vec{d}=\vec{a}$ olsun. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$



Vektorun ədədə vurulması

Tərif: $\vec{a}$ vektorunun k ədədinə hasili dedikdə elə $\vec{b} = k\vec{a}$ vektoru başa düşülür ki, $\vec{b}$ vektorunun uzunluğu $|k||\vec{a}|$ hasilinə bərabər olsun, istiqaməti k>0 olduqda $\vec{a}$ vektorunun istiqaməti ilə eyni, k<0 olduqda $\vec{a}$ vektorunun istiqamətinin əksinə, k=0 olduqda isə istənilən olsun



Asanlıqla yoxlamaq olar ki, vektorun ədədə vurulmasının aşağıdakı xassələri var:

1) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$,

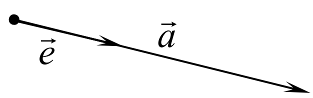
2) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$,

3) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$,

4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}, \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}.$

Əgər $\vec{0}$-dan fərqli $\vec{a}$ vektorunu onun uzunluğuna bölsək, yəni $\frac{1}{|\vec{a}|}$ ədədinə vursaq, onda vahid uzunluqlu $\vec{e}$ vektorunu alarıq:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$



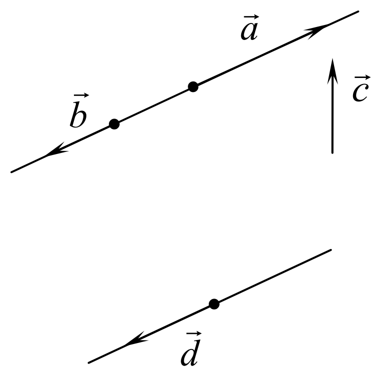
(Aydındır ki, $\vec{e}$ vektorunun istiqaməti $\vec{a}$ vektorunun istiqaməti ilə eynidir). $\vec{e}$ vektoruna $\vec{a}$ vektorunun *ort vektoru* deyilir.

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}. \qquad (1)$$

(1) düsturu $\vec{0}$ üçün də formal olaraq doğrudur: $\vec{0} = 0 \cdot \vec{e}$, $\vec{e}$ istənilən ort vektordur.

Kollinear və komplanar vektorlar

Tərif: Eyni bir düz xətt üzərində və ya iki paralel düz xətt üzərində yerləşən iki vektora *kollinear vektorlar* deyilir. Məsələn, şəkildəki $\vec{a}$ və $\vec{d}$, $\vec{b}$ və $\vec{d}$, $\vec{b}$ və $\vec{a}$ vektorları kollinear vektorlardır; məsələn, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ kollinear deyillər.



Aydındır ki, $\vec{0}$-nu $\forall\vec{a}$ ilə kollinear hesab etmək olar ($\forall$ işarəsi «istənilən» deməkdir).

Teorem: $\vec{0}$-dan fərqli iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektoru yalnız və yalnız o zaman kollineardır ki, onlar mütənasib olsunlar, yəni elə k ədədi olsun ki, $\vec{b} = k\vec{a}$ ödənsin.

Tərif: Eyni bir müstəvi üzərində və ya paralel müstəvilər üzərində yerləşən üç $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektoruna *komplanar vektorlar* deyilir.

Başqa sözlə, demək olar ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorları o zaman komplanardır ki, onları vahid ortaq başlanğıca gətirdikdə bir müstəvi üzərində yerləşsinlər.

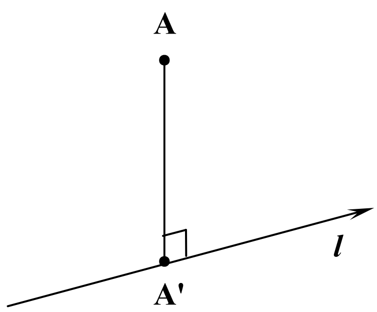
Aydındır ki, 3 vektordan biri $\vec{0}$-dursa, onlar komplanardır.

Teorem: $\vec{0}$-dan fərqli üç $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektoru yalnız və yalnız o zaman komplanardır ki, onlardan biri digər ikisinin xətti kombinasiyası şəklində göstərilsin, yəni, məsələn, $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ olsun (burada k, l hər hansı ədədlərdir).

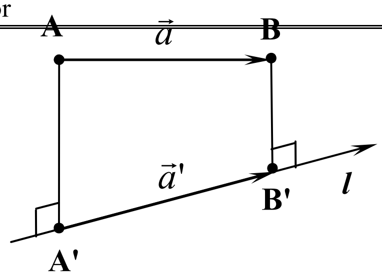
Vektorun ox üzərində proyeksiyası

Ox dedikdə istiqamətlənmiş düz xətt başa düşülür.

Tərif: *A nöqtəsinin l oxu üzərinə proyeksiyası* dedikdə A nöqtəsindən bu oxa endirilmiş AA′ perpendikulyarının A′ oturacağı başa düşülür.



Tərif: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorunun l oxuna nəzərən *komponenti* dedikdə elə $\vec{a}' = \overrightarrow{A'B'}$ vektoru başa düşülür ki, bu vektorun A′ başlanğıcı və B′ sonu $\vec{a}$ vektorunun uyğun olaraq A başlanğıcının və B sonunun l oxu üzə-



rində proyeksiyaları olsun.

Tərif: *$\vec{a}$ vektorunun l oxu üzərinə proyeksiyası* dedikdə $a_l = \pm|\vec{a}'|$ ədədi başa düşülür; burada $\vec{a}'$ $\vec{a}$ vektorunun l oxuna nəzərən komponentidir və komponentin istiqaməti l oxunun istiqaməti ilə üst-üstə düşdükdə «+» işarəsi, əksinə olduqda isə «–» işarəsi götürülür.

$\vec{a}$ vektorunun l oxu üzərinə a_l proyeksiyası belə işarə olunur: $a_l = \Pr_l \vec{a}$.

Göstərmək olar ki, $\vec{a}$ vektorunun l oxu üzərinə proyeksiyası haqqında aşağıdakı teorem doğrudur.

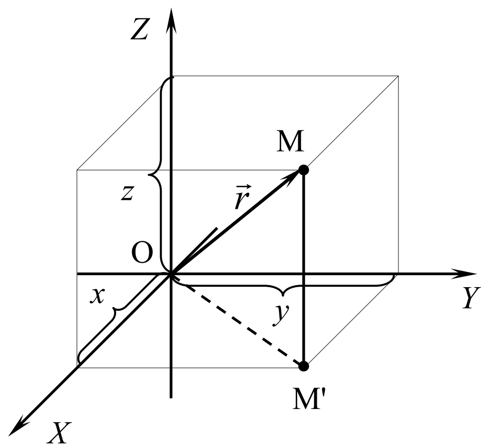
Teorem: $\vec{a}$ vektorunun l oxu üzərinə proyeksiyası $\vec{a}$ vektorunun uzunluğunun bu vektor ilə l oxu arasındakı bucağın kosinusuna olan hasilinə bərabərdir:

$$a_l = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi, \quad \varphi = (\widehat{\vec{a}, l}).$$

Bu teoremə görə, əgər vektor oxla iti bucaq əmələ gətirirsə, onun həmin ox üzərinə proyeksiyası müsbət ədəd; kor bucaq əmələ gətirirsə, mənfi ədəd; düz bucaq əmələ gətirirsə, sıfırdır.

Fəzada dekart koordinat sistemi

Tutaq ki, OX, OY, OZ fəzada üç qarşılıqlı perpendikulyar oxlardır (*koordinat oxları*). Həmin oxlardan keçən qarşılıqlı perpendikulyar OYZ, OZX, OXY müstəvilərinə *koordinat müstəviləri* deyilir. OX, OY, OZ oxlarının kəsişmə nöqtəsi – O *koordinat başlanğıcı* adlanır.



Koordinat müstəviləri fəzanı 8 *oktanta* bölür.

Fəzanın $\forall$M nöqtəsinə onun $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ *radius vektoru* uyğun gəlir.

Fəzada M nöqtəsinin x, y, z düzbucaqlı Dekart koordinatları dedikdə onun $\vec{r}$ radius vektorunun uyğun koordinat oxları üzərinə proyeksiyaları başa düşülür və M(x, y, z) kimi işarə olunur; x-ə M nöqtəsinin *absisi*, y-ə *ordinatı*, z-ə isə *applikatı* deyilir.

Aydındır ki,

$$|\vec{r}|^2 = OM'^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (1)$$

$\vec{r}$ radius vektoru OX, OY, OZ koordinat oxları ilə uyğun olaraq α, β, γ bucaqları əmələ gətirirsə, onda

$$x = |\vec{r}|\cos\alpha, \quad y = |\vec{r}|\cos\beta, \quad z = |\vec{r}|\cos\gamma. \quad (2)$$

$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma$ - $\vec{r}$ radius vektorunun *istiqamətləndirici kosinusları* adlanır.

(1) və (2)-dən alırıq ki,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{|\vec{r}|^2} + \frac{y^2}{|\vec{r}|^2} + \frac{z^2}{|\vec{r}|^2} = \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^2} = 1$$

və ya

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (3)$$

Qeyd edək ki, fəzada nöqtənin koordinatlarına bu nöqtənin koordinat müstəvisindən olan məsafələri kimi də tərif vermək olardı (müvafiq işarə ilə).

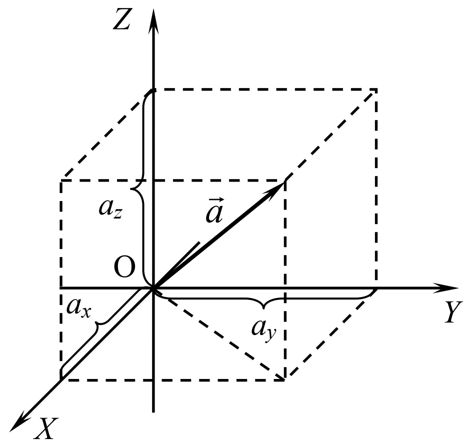
Vektorun koordinatları. Vektorun uzunluğu və istiqaməti

Tutaq ki, OXYZ koordinat fəzasında $\vec{a}$ vektoru verilib (aydındır ki, başlanğıcı O-da olan $\vec{a}$-na bərabər vektora baxa bilərik).

$\vec{a}$ vektorunun koordinatları dedikdə bu vektorun koordinat oxları üzərinə

$$a_x = \Pr_{ox}\vec{a}, \quad a_y = \Pr_{oy}\vec{a}, \quad a_z = \Pr_{oz}\vec{a}$$

proyeksiyaları başa düşülür və belə işarə olunur: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$.



Əvvəlki başlıqda olduğu kimi ala bilərik ki,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (1)$$

yəni, *vektorun uzunluğu onun koordinatlarının kvadratları cəminin hesabi kvadrat* *kökünə bərabərdir*.

Aydındır ki, $\vec{a}$ vektorunun istiqamətləndirici kosinusları ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) aşağıdakı bərabərlikdən müəyən olunacaq:

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$$

və ya

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \qquad (2)$$

(burada nəzərdə tutulur ki, $\vec{a}$ sıfır olmayan vektordur).

Əvvəlki başlıqda olduğu kimi burada da:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

yəni istiqamətləndirici kosinusların kvadratları cəmi 1-ə bərabərdir.

$\vec{0}$-dan fərqli vektorun istiqaməti onun istiqamətləndirici kosinusları ilə birqiymətli təyin olunur. Beləliklə alırıq ki, *vektorun uzunluğu və istiqaməti onun koordinatları ilə tam xarakterizə oluna bilər* ((1) və (2)-yə bax).

Misal. $\vec{a}(1;2;-2)$ vektoru verilib. $|\vec{a}|$=? $\vec{a}$ vektorunun istiqamətini təyin edin (yəni istiqamətləndirici kosinuslarını tapın).

Həlli. (1) düsturuna görə yaza bilərik:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ (vahid).}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{3}.$$

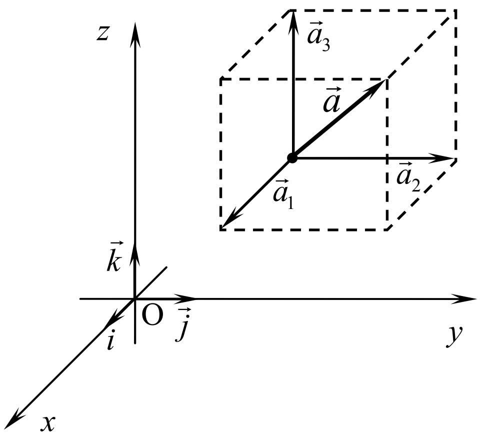
Cavab: 3 vahid; $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

Koordinatları ilə verilmiş vektorlar üzərində əməllər

Tutaq ki, düzbucaqlı koordinat sistemində $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ vektoru verilib. Diaqonalı $\vec{a}$ vektoru olan düzbucaqlı paralelepiped quraq (tilləri $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ olsun). Aydındır ki,

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \text{ (şəklə bax).} \qquad (1)$$

Koordinat oxları üzrə vahid vektorlar daxil edək (ort vektorlar): $\vec{i}$, $\vec{j}$, və $\vec{k}$.



$$\vec{a}_1 = a_x \cdot \vec{i},$$
$$\vec{a}_2 = a_y \cdot \vec{j}, \qquad (2)$$
$$\vec{a}_{31} = a_z \cdot \vec{k}$$

(2) münasibətlərini (1)-də nəzərə alaq:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} .$$

Axırıncı – vektorun koordinat forması adlanır. Hər hansı $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ götürsək,

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

olar. İndi koordinat formasında verilmiş vektorlar üzərində əməllərlə tanış olaq:

1. $\lambda\vec{a} = \lambda(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$ olduğundan

$$\lambda\vec{a} = \overrightarrow{(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)}$$

olar. Beləliklə, *vektoru ədədə vurduqda vektorun koordinatları bu ədədə vurulur.*

2. $$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \pm (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$
$$= (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$$

olduğundan

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \overrightarrow{(a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)}$$

olar, yəni vektorlar toplanarkən (çıxılarkən), uyğun koordinatlar toplanır (çıxılır).

Misal. $\vec{F}_1(10;20;30)$, $\vec{F}_2(30;20;10)$ qüvvələri verilib. Onların cəmini tapın. Cəm vektorunun uzunluğunu və istiqamətini təyin edin.

Həlli. Cəm vektoru $\vec{F}$ ilə işarə edək.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{(10+30;20+20;30+10)} = \overrightarrow{(40;40;40)}$$

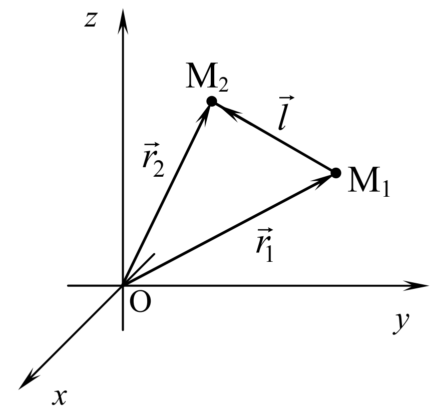
$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{40^2 + 40^2 + 40^2} = \sqrt{3 \cdot 40^2} = 40\sqrt{3} .$$

$\vec{F}$ vektorunun istiqamətləndirici kosinusları:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{\left|\vec{F}\right|} = \frac{40}{40\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta = \frac{40}{40\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Fəzada iki nöqtə arasındakı məsafə

Tutaq ki, fəzada düzbucaqlı koordinat sistemində $M_1(x_1, y_1, z_1)$ və $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri verilib. M_1M_2 məsafəsini tapaq.



Aydındır ki, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{l} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$,

yəni

$$\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \qquad (1)$$

$\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{l}\,(l_x, l_y, l_z)$ olduğunu nəzərə alsaq, (1) münasibəti koordinatlarla aşağıdakını verər:

$$l_x = x_2 - x_1, \quad l_y = y_2 - y_1, \quad l_z = z_2 - z_1.$$

$$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

Beləliklə, fəzada verilmiş 2 nöqtə arasındakı məsafə bu nöqtələrin uyğun koordinatları fərqlərinin kvadratları cəminin kvadrat kökünə bərabərdir.

Vektorların skalyar hasili

Tərif: $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili dedikdə bu vektorların uzunluqlarının onlar arasındakı bucağın kosinusuna hasili başa düşülür və $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (və yaxud $(\vec{a}, \vec{b})$) kimi işarə olunur:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \qquad (1)$$

Skalyar hasilin aşağıdakı xassələri var:

1) yerdəyişmə xassəsi: $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$.

Bu xassə (1)-dən alınır (yoxlayın).

2) paylama xassəsi: $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$.

3) $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$. Vektorun özünə skalyar hasili onun uzunluğunun kvadratına bərabərdir.

Doğrudan da, $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{a}})=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|^2$. Bu xassədən alırıq ki,

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}\,.$$

4) Ədədi vuruğu skalyar hasil işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\lambda\vec{b})\,.$$

Bu xassə də (1)-dən asanlıqla alınır (yoxlayın).

5) $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a},\vec{c})+\mu(\vec{b},\vec{c})$.

Bu xassə 2) və 4) xassələrindən nəticə kimi alınır (bunu özünüz edin).

İki vektor perpendikulyar olarsa, onların skalyar hasili 0 olar.

Doğrudan da, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları perpendikulyar isə, onda:

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^o=0\,.$$

İki vektorun skalyar hasili 0 olarsa, bu vektorlar perpendikulyardır. Doğrudan da, $(\vec{a},\vec{b})=0$ isə, buradan alınır ki,

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0\,,$$

başqa sözlə, ya $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=90^o$; ya da $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa biri $\vec{0}$-dur və bu halda isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını yenə perpendikulyar hesab etmək olar.

Misal. $|\vec{a}|$=3 vahid, $|\vec{b}|$=3 vahid, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^o$ olarsa, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasilini tapın; $2\vec{a}+3\vec{b}$ vektoru ilə $\vec{a}$ vektorunun skalyar hasilini tapın.

Həlli. Əvvəlcə $(\vec{a},\vec{b})$ skalyar hasilini tapaq:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^o = 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5 .$$

İndi də $(2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{a})$ skalyar hasilini tapaq; 5-ci xassəyə görə

$$(2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{a}) = 2(\vec{a},\vec{a}) + 3(\vec{b},\vec{a}) = 2|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos 60^o = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 40{,}5 .$$

Cavab: 7,5; 40,5.

Vektorların koordinat formada skalyar hasili

Tutaq ki,

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \tag{1}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \tag{2}$$

vektorları verilib. Bu vektorları skalyar vursaq, skalyar hasilin xassələrini və

$$(\vec{i},\vec{i}) = (\vec{j},\vec{j}) = (\vec{k},\vec{k}) = 1, \quad (\vec{i},\vec{j}) = (\vec{i},\vec{k}) = (\vec{j},\vec{k}) = 0$$

olduğunu nəzərə alsaq,

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{3}$$

düsturunu alarıq (yoxlayın). Beləliklə, *2 vektorun skalyar hasili onların eyniadlı koordinatlarının hasilləri cəminə bərabərdir*.

Digər tərəfdən $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ olduğundan (burada $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$):

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

(4) düsturu – koordinatları ilə verilmiş 2 vektor arasındakı bucağı tapmağa imkan verir.

Misal. $\vec{a}(1;2;3)$ və $\vec{b}(-3;2;-1)$ vektorları arasındakı bucağı tapın.

Həlli. (4) düsturunu tətbiq etsək, yaza bilərik (φ ilə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucağı işarə edək):

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = -\frac{1}{7}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) \approx 98^o 10'.$$

Cavab: $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$

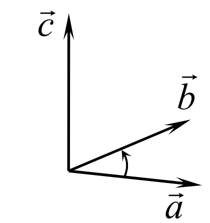
Vektorların vektorial hasili anlayışı

Tərif: $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının vektorial hasili dedikdə elə $\vec{c}$ vektoru başa düşülür ki, aşağıdakı 3 şərt ödənsin:

1) $\vec{c}$ vektorunun uzunluğu $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının uzunluqlarının onlar arasındakı bucağın sinusuna hasilinə bərabər olsun: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

2) $\vec{c}$ vektoru $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının hər birinə perpendikulyar olsun;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarını ortaq başlanğıca gətirdikdə $\vec{c}$ vektorunun ucundan baxarkən $\vec{a}$ vektorunun $\vec{b}$ vektoruna tərəf ən qısa dönməsi saat əqrəbinin əksinə olsun.



$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının vektorial hasili belə işarə olunur: $\vec{a}$ x $\vec{b}$ və ya $[\vec{a}, \vec{b}]$.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının vektorial hasilinin modulu tərifə görə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsini verir.

Vektorial hasilin bəzi xassələrini sayaq:

1) $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$

2) $[\vec{a},\vec{a}] = \vec{0}$

3) $[\lambda\vec{a},\vec{b}] = [\vec{a},\lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$

4) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}]$

Aydındır ki, 2 vektor kollinear olarsa, onların vektorial hasili $\vec{0}$-dur.

İndi vektorların koordinat formada vektorial hasilini verək. Tutaq ki,

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Vektorial hasilin xassələrini və

$[\vec{i},\vec{i}] = [\vec{j},\vec{j}] = [\vec{k},\vec{k}] = \vec{0}$, $[\vec{i},\vec{j}] = -[\vec{j},\vec{i}] = \vec{k}$, $[\vec{j},\vec{k}] = -[\vec{k},\vec{j}] = \vec{i}$, $[\vec{k},\vec{i}] = -[\vec{i},\vec{k}] = \vec{j}$

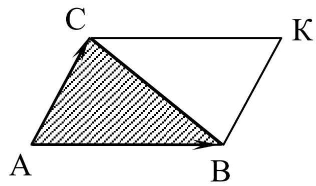
bərabərliklərini nəzərə almaqla aşağıdakını yoxlamaq çətin deyil:

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Məsələ: ABC üçbucağı verilib, A(1;1;0), B(1;0;1), C(0;1;1). Bu üçbucağın sahəsini tapın.

Həlli. CK||AB və BK||AC çəkək.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ABKC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|,$$



$$\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{1-1;0-1;1-0}) = (\overrightarrow{0;-1;1}),$$

$$\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{0-1;1-1;1-0}) = (\overrightarrow{-1;0;1}).$$

(1) düsturuna görə yaza bilərik:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k};$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

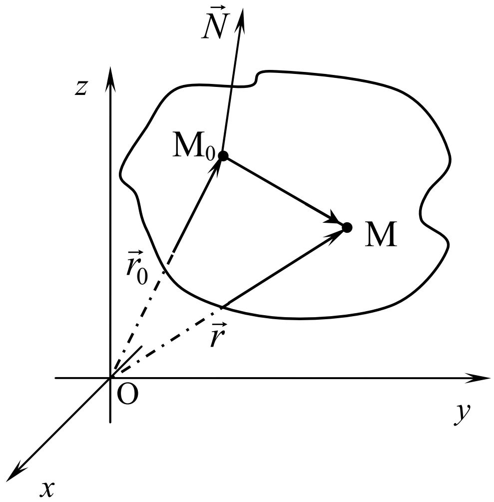
Deməli, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (kvadrat vahid).

Cavab. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ vahid.

MÜHAZİRƏ 9.
FƏZADA ANALİTİK HƏNDƏSƏNİN ELEMENTLƏRİ

Fəzada müstəvinin ümumi tənliyi

Tutaq ki, $M_o(x_o, y_o, z_o)$ nöqtəsindən keçən və normalı $\vec{N}(A,B,C)$ vektoru olan müstəvinin tənliyini yazmaq tələb olunur (qeyd edək ki, müstəvinin normalı dedikdə, sıfır vektordan fərqli elə vektor başa düşülür ki, bu vektor müstəviyə perpendikulyar olsun). Bu məqsədlə həmin müstəvi üzərində $\forall$ M(x; y; z) nöqtəsi götürək.



Tutaq ki, M_o nöqtəsinin radius vektoru $\vec{r}_o$, M nöqtəsinin radius vektoru $\vec{r}$ vektorudur. Aydındır ki, $\vec{r}_o(x_o, y_o, z_o)$, $\vec{r}(x, y, z\ )$ olar. Onda

$$\overrightarrow{M_oM} = \vec{r} - \vec{r}_o$$

vektorunun koordinatları $(x - x_o, y - y_o, z - z_o)$ olar. $\overrightarrow{M_oM}$ vektoru baxılan müstəvi üzərində olduğundan $\overrightarrow{M_oM}$ vektoru $\vec{N}(A,B,C)$ normalına perpendikulyardır. Deməli, onların skalyar hasili 0-a bərabərdir:

$(\overrightarrow{M_oM}, \vec{N}) = 0$. Buradan isə , $\vec{N}$ vektorunun koordinatları (A,B,C) və $\overrightarrow{M_oM}$ vektorunun koordinatları $(x - x_o, y - y_o, z - z_o)$ olduğundan, alırıq ki,

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0. \tag{1}$$

(1) - (x_o, y_o, z_o) nöqtəsindən keçən və normalın koordinatları (A,B,C) olan müstəvinin tənliyidir.

(1) tənliyini bu şəkildə də yaza bilərik:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

burada $D = -Ax_o - By_o - Cz_o$.

(2)-yə müstəvinin *ümumi tənliyi* deyilir. Bu tənlik x, y, z cari dəyişənlərinə nəzərən I dərəcəli tənlikdir.

Göstərmək olur ki, (x_1, y_1, z_1) nöqtəsindən $Ax + By + Cz + D = 0$ müstəvisinə qədər olan d məsafəsi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3}$$

Məsələ: (2; -1; 8) nöqtəsindən keçən və normalı $\vec{N}(4,2,-3)$ olan müstəvinin ümumi tənliyini yazın.

Həlli. (1)-ə görə yaza bilərik:

$$4(x-2)+2(y-(-1))-3(z-8)=0,$$

$$4x-8+2y+2-3z+24=0,$$

$$4x+2y-3z+18=0.$$

Cavab: 4x+2y-3z+18=0.

Müstəvilər arasında bucaq. Müstəvilərin paralellik və perpendikulyarlıq şərtləri

Tutaq ki, normalları $\vec{N}(A,B,C)$ və $\vec{N}'(A',B',C')$ olan iki

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ və} \tag{1}$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \tag{2}$$

müstəviləri verilib. Onda aydındır ki, bu iki müstəvi arasındakı φ ikiüzlü bucağı onların $\vec{N}$ və $\vec{N}'$ normalları arasındakı bucağa bərabərdir. Ona görə də (1) və (2) müstəviləri arasındakı φ ikiüzlü bucağının kosinusu üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{N},\vec{N}')}{|\vec{N}|\cdot|\vec{N}'|} = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \tag{3}$$

İndi (1) və (2) müstəvilərinin paralellik və perpendikulyarlıq şərtlərini verək.

1) (1) və (2) müstəviləri o zaman paralel olar ki, onların $\vec{N}(A,B,C)$ və $\vec{N}'(A',B',C')$ normalları kollenear olsun, yəni aşağıdakı şərt ödənsin:

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}.$$

Bu şərt – (1) və (2) müstəvilərinin paralellik şərtidir.

2) (1) və (2) müstəviləri perpendikulyar olarsa, $\cos\varphi = \cos 90^o = 0$ olar; onda (3)-dən alırıq:

$$AA' + BB' + CC' = 0 \tag{4}$$

Əksinə mühakimə yürütməklə, göstərmək olar ki, (4) münasibəti ödənərsə, (1) və (2) müstəviləri perpendikulyardır. (4) – müstəvilərin perpendikulyarlıq şərtidir.

Məsələ. x-z=0 və y-z=0 müstəviləri arasındakı φ ikiüzlü bucağını tapın.

Həlli. x-z=0 müstəvisinin normalı $\vec{N}(1,0,-1)$ və y-z=0 müstəvisinin normalı isə $\vec{N}'(0,1,-1)$ vektorudur. Onda (3) düsturuna görə yaza bilərik:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

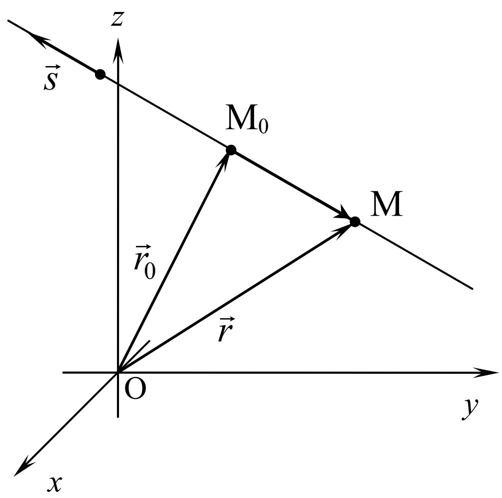
və ya

$$\varphi = 60^o$$

Cavab: $\varphi = 60^o$.

Fəzada düz xəttin tənliyi

Tutaq ki, $M_o(x_o,y_o,z_o)$ nöqtəsindən keçən və istiqamətləndirici vektoru $\vec{s}(l,m,n)$ olan düz xəttin tənliyini yazmaq tələb olunur (fəzada). Qeyd edək ki, düz xəttin istiqamətləndirici vektoru dedikdə, sıfır vektordan fərqli elə vektor başa düşülür ki, bu vektor ya verilmiş düz xəttin üzərindədir, ya da ona paraleldir.



Bu məqsədlə həmin düz xətt üzərində ∀M(x, y, z) nöqtəsi götürək. M(x, y, z) nöqtəsinə uyğun radius vektor $\vec{r}(x,y,z)$, $M_o(x_o, y_o, z_o)$ nöqtəsinə uyğun radius vektor isə – $\vec{r}_o(x_o,y_o,z_o)$ olsun. Onda

$$\overrightarrow{M_oM} = \vec{r} - \vec{r}_o \tag{1}$$

$\overrightarrow{M_oM}$ və $\vec{s}$ vektorları kollinear olduğundan elə t ədədi var ki,

$$\overrightarrow{M_oM} = t \cdot \vec{s}\ .$$

Axırıncını (1)-də nəzərə alaq:

$$\vec{r} - \vec{r}_o = t \cdot \vec{s}$$

və ya

$$\vec{r} = \vec{r}_o + t \cdot \vec{s}\ . \qquad (2)$$

(2) bərabərliyinə *fəzada* verilmiş *düz xəttin vektor tənliyi* deyilir (t – parametrdir). (2)-ni koordinatlarla yazaq:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o + tl \\ y &= y_o + tm \\ z &= z_o + tn \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

(3)-ə *fəzada düz xəttin parametrik tənlikləri* deyilir.

(3) tənliklərini belə də yazmaq olar:

$$\frac{x - x_o}{l} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{n}. \qquad (4)$$

(4)-ə *fəzada* verilmiş *düz xəttin kanonik tənliyi* deyilir. (4) – (x_o, y_o, z_o) nöqtəsindən keçən və istiqamətləndirici vektorunun koordinatları (l,m,n) olan düz xəttin tənliyidir.

Düz xəttin istiqamətləndirici vektorunun l, m, n koordinatlarını bilməklə, həmin düz xəttin koordinat oxları ilə əmələ gətirdiyi α, β, γ bucaqlarını tapmaq olar:

$$\cos\alpha = \frac{l}{|\vec{s}|} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{m}{|\vec{s}|} = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{n}{|\vec{s}|} = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

l, m və n-ə düz xəttin istiqamətləndirici əmsalları deyilir. Beləliklə, düz xəttin istiqamətləndirici kosinusları onun istiqamətləndirici əmsalları ilə mütənasibdir. Ona görə də (4)-ü aşağıdakı standart şəkildə yazmaq olar:

$$\frac{x - x_o}{\cos\alpha} = \frac{y - y_o}{\cos\beta} = \frac{z - z_o}{\cos\gamma}.$$

MÜHAZİRƏ 10.
KOMPLEKS ƏDƏDLƏRİN ELEMENTAR NƏZƏRİYYƏSİ.

Kompleks ədədlər və onlar üzərində əməllər

Kompleks ədəd dedikdə $z = x + iy$ (və ya $z = x + yi$) şəklində ədəd başa düşülür. Burada x və y həqiqi ədədlər, i – xəyali vahiddir. $x + i0 = x$ şəklində kompleks ədədlər həqiqi ədədləri verir. $0 + iy = iy$ şəklində kompleks ədədlər sırf xəyali ədədlər adlanır. x və y həqiqi ədədləri z kompleks ədədinin, uyğun olaraq, həqiqi və xəyali hissələri adlanır.

$z = x + iy$ kompleks ədədinin *modulu* dedikdə $\sqrt{x^2 + y^2}$ ədədi başa düşülür və $|z|$ ilə işarə olunur: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(|z| \geq 0)$. $z = x + iy$ kompleks ədədinin *qoşması* dedikdə, $\bar{z} = x - iy$ başa düşülür. Aydındır ki, $|\bar{z}| = |z|$.

Kompleks ədədlər o zaman bərabər hesab olunur ki, onların həqiqi və xəyali hissələri bərabər olsun.

Kompleks ədədlər üzərində əmələlər aşağıdakı kimi daxil olunur:

1) $z_1 = x_1 + iy_1$ və $z_2 = x_2 + iy_2$ olarsa, $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Buradan xüsusi halda alırıq ki,

$$i^2 = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1,$$

$$i^2 = -1. \qquad (*)$$

Qeyd edək ki, $z_1 z_2$ hasilinin tapılma qaydası $x_1 + iy_1$ və $x_2 + iy_2$ ikihədliləri-nin (*) nəzərə alınmaqla formal vurulması yolu ilə alına bilər. Aydındır ki, $z = x + iy$ və $\bar{z} = x - iy$ üçün $z \cdot \bar{z} = |z^2| = x^2 + y^2$ olar.

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $(z_2 \neq 0)$.

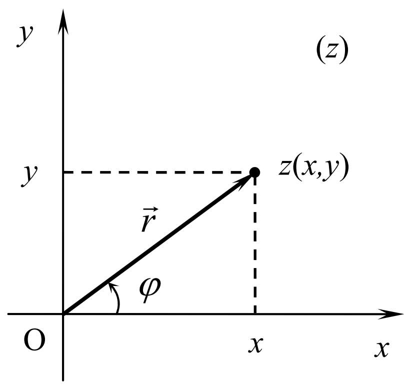
Misal. $\dfrac{1 + 2i}{3 - i} = ?$

Həlli. $\frac{1+2i}{3-i}=\frac{(1+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{(3-2)+i(1+6)}{3^2+1^2}=\frac{1+7i}{10}=0.1+0.7i$

Cavab: 0.1+0.7*i*.

Kompleks müstəvi. Kompleks ədədin triqonometrik şəkli

Məlumdur ki, həqiqi ədədlər həndəsi olaraq ədəd oxunun nöqtələri ilə göstərilir. Hər bir kompleks ədəd 2 həqiqi ədədlə təyin olunduğundan kompleks ədədləri həndəsi olaraq müstəvinin nöqtələri ilə göstərirlər.



Müstəvi üzərində düzbucaqlı Oxy koordinat sistemi götürək və hər bir $z=x+iy$ kompleks ədədinə qarşı müstəvinin $z(x,y)$ nöqtəsini qoyaq və tərsinə. Beləliklə, hər bir (x,y) nöqtəsi $z=x+iy$ kompleks ədədinin həndəsi təsviri olur.

Kompleks ədədləri həndəsi olaraq göstərmək üçün işlədilən koordinat müstəvisinə *kompleks müstəvi* deyilir. Kompleks müstəvi üzərindəki absis oxuna *həqiqi ox*, ordinat oxuna isə *xəyali ox* deyilir (belə ki, absis oxu üzərində sırf həqiqi ədədlər, ordinat oxu üzərində isə sırf xəyali ədədlər yerləşir). Aydındır ki, $z=x+iy$ kompleks ədədinin $z=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ modulu z-ə uyğun nöqtənin koordinat başlanğıcından olan məsafəsini verir.

Qeyd edək ki, hər bir sıfırdan fərqli z kompleks ədədi koordinat başlanğıcından bu ədədə uyğun nöqtəyə qədər olan bir radius vektor təyin edir. Bu radius-vektorun absis oxu ilə əmələ gətirdiyi φ bucağına z kompleks ədədinin *arqumenti* deyilir və $\varphi=arq\ z$ kimi işarə olunur($-\infty<arq\ z<+\infty$). z=0-ın arqumenti ixtiyaridir.

Kompleks ədədin arqumentinin mütləq qiymətcə ən kiçik qiyməti arqumentin baş qiyməti adlanır və arq z ilə işarə olunur: $-\pi<arq\le\pi$. Məsələn, arq2=0; arq(–1)=π; arq i=$\frac{\pi}{2}$ və s.

φ arqumenti üçün $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ və ya $tg\varphi = \frac{y}{x}$ doğrudur. Buradan aydındır ki, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Ona görə də $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi =$ $= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1)$$

Burada $r = |z|$, $\varphi = arq\ z$. (1)-ə *kompleks ədədin triqonometrik şəkildə yazılışı* deyilir.

Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlər üzərində əməllər. Muavr düsturları

***Teorem* 1**. Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlərin hasilinin modulu vuruqların modulları hasilinə, arqumenti isə vuruqların arqumentləri cəminə bərabərdir; başqa sözlə, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ olarsa, $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ olar.

İsbatı. Doğrudan da,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)$$
$$+ i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Bunu da isbat etmək lazım idi.

Nəticə. Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədin natural üstlü qüvvətinin modulu bu kompleks ədədin modulunun həmin dərəcədən qüvvətinə, arqumenti isə həmin kompleks ədədin arqumentinin qüvvət üstünə hasilinə bərabərdir. Yəni

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Bu düstur *Muavr düsturu* adlanır.

Misal. $(1+i)^{20}$ qüvvətini hesablayın.

Həlli. Əvvəlcə $1+i$ kompleks ədədini triqonometrik şəkildə yazaq ($z = x + iy = 1 + i \cdot 1$):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Deməli, $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

$$(1+i)^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos(\frac{\pi}{4}\cdot 20) + i\sin(\frac{\pi}{4}\cdot 20)\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos 5\pi + i\sin 5\pi\right) = 1024\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -1024$$

Cavab: $(1+i)^{20}$=–1024.

***Teorem* 2**. Triqonometrik şəkildə verilmiş bir kompleks ədədin 0-dan fərqli digər kompleks ədədə qismətinin modulu bu ədədlərin modulları qismətinə, arqumenti isə bölünənin arqumenti ilə bölənin arqumentinin fərqinə bərabərdir; başqa sözlə, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ olarsa,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

İsbatı: Doğrudan da,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(-\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)}{(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Bunu da isbat etmək tələb olunurdu.

İndi kompleks ədəddən kökalma ilə tanış olaq. İsbat edək ki, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ isə, onda

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

k=0, 1, 2, …, n–1; n$\in$N.

Bu düstur da *Muavr düsturu* adlanır.

İsbatı:

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad (1)$$

işarə edək. Onda

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

olar. Digər tərəfdən $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ olduğundan, axırıncı 2 bərabərlikdən alırıq ki,

$$\rho^n = r,\ n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k \in Z\ (Z = \{0; \pm 1; \pm 2; ...\})$$

və ya

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Bu ifadələri (1)-də nəzərə alaq:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in Z.$$

Qeyd edək ki, k olaraq yalnız k=0, 1, 2, …, n–1 götürmək olar. Çünki k-ın qalan qiymətlərində $\sqrt[n]{z}$ -ın qiymətləri təkrarlanır.

Misal. $\sqrt{i} = ?$

Həlli. Əvvəlcə i kompleks ədədini triqanometrik şəkildə yazaq. i=0+1·i olduğundan

$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

olar. Deməli, $i = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Onda kompleks ədəddən kökalma düsturuna əsasən yaza bilərik:

$$\sqrt{i} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right), \quad k = 0, 1.$$

k=0 olduqda:

$$\sqrt{i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\,,$$

k=1 olduqda

$$\sqrt{i} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\,.$$

Cavab: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i\,.$

MÜHAZİRƏ 11
ƏDƏDİ ARDICILLIQ VƏ LİMİT

Ədədi ardıcıllıqlar və onlar üzərində əməllər. Məhdud və qeyri-məhdud ardıcıllıqlar

Tərif. Əgər 1, 2, ..., n, ... natural sırasının hər bir n ədədinə qarşı müəyyən qanunauyğunluq üzrə hər hansı bir x_n həqiqi ədədi qoyulubsa, onda nömrələnmiş

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \qquad (1)$$

ədədlərinə *ədədi ardıcıllıq* və ya sadəcə *ardıcıllıq* deyilir.

x_n ədədlərinə ardıcıllığın hədləri (və ya elementləri) deyilir. (1) ardıcıllığını qısa $\{x_n\}$ simvolu ilə işarə edirlər. Məsələn, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ simvolu ilə $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ ardıcıllığı içarə olunub.

Tutaq ki, $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqları verilib. Bu ardıcıllıqların cəmi dedikdə

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots$$

və ya $\{x_n + y_n\}$ ardıcıllığı başa düşülür. Analoji qayda ilə $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqlarının fərqi, hasili, qisməti dedikdə, uyğun olaraq, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ardıcıllıqları başa düşülür.

Qeyd. $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ardıcıllığının təyini zamanı tələb etmək lazımdır ki, y_n-lər 0-dan fərqli olsunlar. Lakin əgər $\{y_n\}$ ardıcıllığının yalnız ilk sonlu sayda həddi 0 olarsa, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ardıcıllığını $\{y_n\}$-lərin 0-dan fərqli olduğu nömrədən başlayaraq təyin etmək olar.

Tərif 1. Tutaq ki, $\{x_n\}$ ədədi ardıcıllığı verilib və elə M həqiqi ədədi var ki, bu ardıcıllığın $\forall x_n$ həddi üçün $x_n \le M$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda $\{x_n\}$ ardıcıllığı *yuxarıdan məhdud ardıcıllıq* adlanır, M-ə isə $\{x_n\}$ ardıcıllığının *yuxarı sərhədi* deyilir.

Tərif 2. Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı verilib və elə ***m*** həqiqi ədədi var ki, bu ardıcıllığın $\forall x_n$ həddi üçün $x_n \ge m$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda $\{x_n\}$ ardıcıllığı *aşağıdan məhdud ardıcıllıq* adlanır, ***m***-ə isə $\{x_n\}$ ardıcıllığının *aşağı sərhədi* deyilir.

Tərif 3. Tutaq ki, $\{x_n\}$ ədədi ardıcıllığı verilib. Əgər bu ardıcıllıq həm aşağıdan, həm də yuxarıdan məhduddursa, yəni əgər hər hansı m və M ədədləri və $\{x_n\}$ ardıcıllığının $\forall x_n$ həddi üçün $m \le x_n \le M$ bərabərsizliyi ödənirsə, onda həmin ardıcıllıq *məhdud ardıcıllıq* adlanır.

Tərif 4. Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı verilib və $\forall A > 0$ ədədi üçün bu ardıcıllığın elə x_n həddini tapmaq olur ki, $|x_n| > A$ ödənir. Onda $\{x_n\}$ ardıcıllığı *qeyri-məhdud ardıcıllıq* adlanır.

Bir neçə misala baxaq.

1) –1; –4; –9; ...; $-n^2$; ... ardıcıllığı yuxarıdan məhduddur, aşağıdan isə məhdud deyil. –1-dən böyük və ya bərabər olan istənilən ədəd bu ardıcıllığın yuxarı sərhədidir.

2) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4};...;\frac{1}{n};...$ ardıcıllığı məhdud ardıcıllıqdır (üçüncü tərifə görə).

3) 1; 2; 3; 1; 4;...; 1; n; 1; n+1;... ardıcıllığı qeyri məhdud ardıcıllıqdır (dördüncü tərifə görə).

Sonsuz böyük və sonsuz kiçik ardıcıllıqlar

Tərif. Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı verilib və $\forall A > 0$ ədədi üçün $\exists N_A$ nömrəsi göstərmək olur ki, $\forall n \ge N_A$ üçün $|x_n| > A$ ödənilir. Onda $\{x_n\}$ ardıcıllığı *sonsuz böyük ardıcıllıq* adlanır.

Aydındır ki, əgər $\{x_n\}$ ardıcıllığı sonsuz böyükdürsə, onda bu ardıcıllıq qeyri-məhduddur. Lakin bu təklifin tərsi doğru deyil.

Məsələn, 1; 2; 1; 3; 1; 4;...; 1; n; 1; 1+n;... ardıcıllığı qeyri məhduddur, lakin sonsuz böyük ardıcıllıq deyil (çünki, A>1 olduqda $|x_n|>A$ bərabərsizliyi tək nömrəli x_n-lərin heç biri üçün doğru deyil).

İndi sonsuz kiçik ardıcıllığın tərifini verək. Sonsuz kiçik ardıcıllığı adətən $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ və s. ilə işarə edirlər.

Tərif. Tutaq ki, $\{\alpha_n\}$ ardıcıllığı verilib və $\forall\varepsilon>0$ ədədi üçün $\exists N_\varepsilon$ nömrəsi göstərmək olur ki, $\forall n\geq N_\varepsilon$ üçün $|\alpha_n|<\varepsilon$ ödənilir. Onda $\{\alpha_n\}$ ardıcıllığı *sonsuz kiçik ardıcıllıq* adlanır.

Misal. $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots$ və ya $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ardıcıllığının sonsuz kiçik ardıcıllıq olduğunu göstərək.

Doğrudan da, $\forall\varepsilon>0$ ədədi götürsək, $|\alpha_n|<\varepsilon$, yəni $\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$ bərabərsizliyinin ödənilməsi üçün $n>\frac{1}{\varepsilon}$ olmalıdır. Ona görə də N_ε nömrəsi olaraq $\frac{1}{\varepsilon}$ ədədinin tam hissəsindən 1 vahid böyük ədədi götürsək (yəni $N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ götürsək), onda $\forall n\geq N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$+1 üçün $n>\frac{1}{\varepsilon}$, yəni $|\alpha_n|=\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$ ödənilər. Deməli, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sonsuz kiçik ardıcıllıqdır.

Sonsuz kiçik ardıcıllıqların aşağıdakı xassələri ilə tanış olaq.

Xassə 1. İki sonsuz kiçik ardıcıllığın cəmi sonsuz kiçik ardıcıllıqdır.

Xassə 2. Sonsuz kiçik ardıcıllıq məhdud ardıcıllıqdır.

Xassə 3. Sonsuz kiçik ardıcıllığın məhdud ardıcıllığa hasili sonsuz kiçik ardıcıllıqdır.

Xassə 4. Sonsuz kiçik ardıcıllıqların hasili sonsuz kiçik ardıcıllıqdır.

Qeyd. İki sonsuz kiçik ardıcıllığın qisməti sonsuz kiçik ardıcıllıq olmaya da bilər.

Məsələn, $\alpha_n=\frac{1}{n}$ və $\beta_n=\frac{1}{n}$ olarsa, $\{\alpha_n\}$ və$\{\beta_n\}$ sonsuz kiçik ardıcıllıqalarının qisməti olan $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ ardıcıllığının bütün hədləri 1 olur: 1; 1;…1;…. Aydındır ki, bu ardıcıllıq sonsuz kiçik deyil. Başqa bir misal göstərək: $\alpha_n=\frac{1}{n}$, $\beta_n=\frac{1}{n^2}$ olarsa, $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$

ardıcıllığı sonsuz böyük ardıcıllıq olur.

Sonsuz böyük və sonsuz kiçik ardıcıllıqlar arasındakı əlaqəni verən (isbatsız qəbul edəcəyimiz) teoremlə tanış olaq.

Terorem. Əgər $\{x_n\}$ sonsuz böyük ardıcıllıqdırsa, onda müəyyən nömrədən başlayaraq $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ardıcıllığı təyin olunub və bu ardıcıllıq sonsuz kiçik ardıcıllıqdır. Əgər $\{\alpha_n\}$ sonsuz kiçik ardıcıllığının bütün hədləri 0-dan fərqli olarsa, onda $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ ardıcıllığı sonsuz böyük ardıcıllıqdır.

Ardıcıllığın yığılması. Ardıcıllığın yığılmasının əsas xassələri

Tərif 1. Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı və a ədədi verilib. Əgər $\{x_n - a\}$ ardıcıllığı sonsuz kiçik ardıcıllıq olarsa, onda deyirlər ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda a ədədinə yığılır.

Aydındır ki, bu tərifi belə də verə bilərik.

Tərif 2. Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı və a ədədi verilib. Fərz edək ki, , $\forall\varepsilon > 0$ ədədi üçün $\exists N_\varepsilon$ nömrəsi var ki, $n \geq N_\varepsilon$ üçün $|x_n - a| < \varepsilon$ ödənilir. Onda deyirlər ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı $n \to \infty$ şərtində a ədədinə yığılır və

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

kimi işarə edilir. a ədədinə $\{x_n\}$ ardıcıllığının *limiti* deyilir.

Tərif 2-dəki $|x_n - a| < \varepsilon$ bərabərsizliyini açıq yazsaq, alırıq ki, $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ və ya $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Bu isə göstərir ki, x_n həddi a ədədinin ε-ətrafına daxildir (a ədədinin ε-ətrafı dedikdə $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervalı başa düşülür). Ona görə tərif 2-ni belə də vermək olar.

Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı və a ədədi verilib. Fərz edək ki, $\forall\varepsilon > 0$ ədədi üçün bu ε-dan asılı elə nömrə göstərmək olur ki, ardıcıllığın bu nömrədən başlayaraq beten hədləri a-nın ε-ətrafına daxil olur. Onda deyilir ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda a ədədinə yığılır.

Qeyd edək ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda a ədədinə yığılırsa, onda tərif 1-ə görə görə $\{x_n - a\} = \{\alpha_n\}$ ardıcıllığı sonsuz kiçik ardıcıllıqdır. Ona görə də yığılan $\{x_n\}$ ardıcıllığının istənilən x_n həddini

$$x_n = a + \alpha_n \qquad (1)$$

şəklində göstərmək olar. Burada α_n hər hansı sonsuz kiçik ardıcıllığın n-ci həddidir.

Misal. $\frac{n}{n+1}$ ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda 1-ə yaxınlaşır, yəni $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Doğrudan da, $\frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n-n-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1}$ və $\left\{-\frac{1}{n+1}\right\}$ sonsuz kiçik ardıcıllıq olduğundan $\left\{\frac{n}{n+1} - 1\right\} = \left\{-\frac{1}{n+1}\right\}$ ardıcıllığı da sonsuz kiçik ardıcıllıqdır, başqa sözlə,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Ardıcıllığın yığılmasının əsas xassələri ilə tanış olaq (bəzilərinin isbatını verməklə).

Teorem 1. Yığılan ardıcıllığın yeganə limiti var.

Teorem 2. Yığılan ardıcıllıq məhduddur.

Qeyd edək ki, bu teoremin tərsi doğru deyil. Başqa sözlə, məhdud ardıcıllıq yığılmaya da bilər. Məsələn,

$$1; -1; 1; -1; ...; 1; -1; ...$$

ardıcıllığı məhduddur, lakin yığılan deyil.

Teorem 3. Yığılan $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqlarının cəmi də yığılan ardıcıllıqdır və cəmin limiti $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqlarının limitləri cəminə bərabərdir:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

İsbatı. Tutaq ki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Onda (1)-ə görə yaza bilərik:

$x_n = a + \alpha_n$, $x_n = b + \beta_n$, burada və $\{\alpha_n\}$ və $\{\beta_n\}$ sonsuz kiçik ardıcıllıqlardır. Buradan isə:

$x_n + y_n = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$ və ya $x_n + y_n - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$.

$\{\alpha_n + \beta_n\}$ sonsuz kiçik ardıcıllıq olduşundan sonuncu bərabərlikdən alınır ki, $\{x_n + y_n\}$ ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda $a + b$ ədədinə yığılır, yəni

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

Analoji qayda ilə aşağıdakı teorem də isbat olunur.

Teorem 4. Yığılan $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqlarının fərqi də yığılır və fərqin limiti $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqlarının limitləri fərqinə bərabərdir:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Teorem 5. Yığılan $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqlarının hasili də yığılan ardıcıllıqdır- və hasilin limiti $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqlarının limitləri hasilinə bərabərdir:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Teorem 6. Tutaq ki, $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ yığılan ardıcıllıqları verilib. Fərz edək ki, $\{y_n\}$ ardıcıllığının hədləri və limiti 0-dan fərqlidir. Onda bu ardıcıllıqların qisməti də yığılan ardıcıllıqdır və qismətin limiti $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqlarının limitləri qismətinə bərabərdir:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Teorem 7 (*bərabərsizlikdə limitə keçmə*). Tutaq ki, yığılan $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqlarının hədləri hər hansı nömrədən başlayaraq $x_n \le y_n$ (və ya $x_n < y_n$) bərabərsizliyini ödəyir. Onda

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$$

bərabərsizliyi də doğrudur.

MÜHAZİRƏ 12
FUNKSİYA. ELEMENTAR FUNKSİYALAR.

Funksiya anlayışı

Təbiətdəki qanunauyğunluqları öyrənərkən sabit və dəyişən kəmiyyətlərə rast gəlinir. Qiymətini dəyişməyən kəmiyyətlərə *sabit kəmiyyətlər,* müxtəlif ədədi qiymətlər alan kəmiyətlərə isə *dəyişən kəmiyyətlər* deyilir.

Bəzi hallarda elə dəyişən kəmiyyətlərə rast gəlmək olur ki, bu kəmiyyətlərdən birinin qiymətləri (asılı olmayan dəyişən) digər kəmiyyətin (asılı dəyişən) qiymətlərini tamamilə təyin edir.

Tərif: Asılı olmayan dəyişənin hər bir qiymətinə asılı dəyişənin yalnız bir qiyməti uyğun gələrsə, belə asılılığa *funksiya* və ya *funksional asılılıq* deyilir.

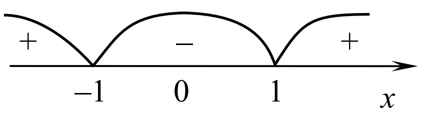
Funksional asılılıq halında asılı olmayan dəyişənə *arqument*, asılı dəyişənə isə *funksiya* deyilir. Arqumenti, x, funksiyanı isə y ilə işarə etsək, onlar arasındakı asılılıq *f* ilə göstərilərsə, bunu belə yazırlar: $y=f(x)$.

Arqumentin ala biləcəyi qiymətlərə funksiyanın *təyin oblastı*, funksiyanın ala biləcəyi qiymətlərə isə funksiyanın *qiymətlər çoxluğu* deyilir.

Misal. $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ funksiyasının təyin oblastı və qiymətlər çoxluğunu tapın.

Həlli. $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Funksiyanın təyin oblastı: $D(y) = [-1;1]$



(D(y) işarəsi y funkiyasının təyin oblastını, E(y) isə qiymətlər çoxluğunu göstərir).

Aydındır ki, verilmiş funksiyanın qiymətlər çoxluğu $E(y) = [0;1]$ olar.

Funksiyanı düsturla, cədvəllə, qrafiklə və s. ilə vermək olar. Funksiyanın düsturla verilməsi üsuluna analitik üsul deyilir.

İndi ikidəyişənli funksiya anlayışı ilə tanış olaq. Əgər iki dəyişən kəmiyyətin hər bir mümkün qiymətləri cütünə üçüncü kəmiyyətin yalnız bir qiyməti uyğun gələrsə, onda bu kəmiyyətə əvvəlki kəmiyyətlərdən asılı *ikidəyişənli funksiya* deyilir.

Məsələn, u x və y-in ikidəyşənli funksiyası olarsa, bu funksiyanı belə işarə edirlər: u=f(x,y) və ya u=g(x,y) və s.

Oxşar qayda ilə üç, dörd və daha çox dəyişənli funksiya anlayışı daxil olunur.

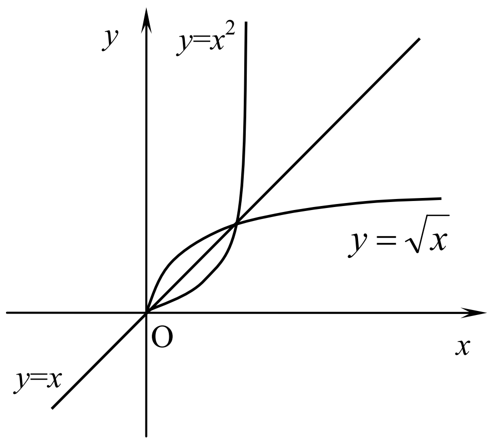
Məsələn, tutaq ki, düzbucaqlının tərəfləri x və y-dir. Bu düzbucaqlının sahəsini u ilə işarə etsək, u=xy olar.

Əgər funksiyanın düsturunda bir tərəfdə ancaq asılı dəyişən olarsa, ona *aşkar funksiya* deyilir. Məsələn, $y = x^2$ funksiyası aşkar funksiyadır. F(x,y)=0 şəklində verilmiş x-dən asılı y funksiyasına *qeyri-aşkar funksiya* deyilir. Məsələn, $x^2 + y^2 = 1$ (y>0) şəklində verilmiş x-dən asılı y funksiyası qeyri-aşkar şəkildə verilmişdir. Aşkar şəkildə yazsaq alarıq:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (y>0).$$

Tutaq ki, y x-dən asılı funksiyadır: y=f(x). Bu ifadədə y-ə arqument, x-ə funksiya kimi baxsaq, x y-in qeyri-aşkar funksiyası olar. Axırıncı funksiyaya əvvəlki funksiyanın *tərsi olan funksiya* deyilir. Məsələn, $y = 2^x$ və $x = \log_2 y$ (və ya $y = \log_2 x$) funksiyaları tərs funksiyalardır; yaxud $y = x^2$ və $y = \sqrt{x}$ $(x \ge 0)$ funksiyaları tərs funksiyalardır.

Qeyd edək ki, tərs funksiyaların qrafikləri y=x düz xəttinə nəzərən simmetrikdirlər. Məsələn, $x \ge 0$ olduqda $y = x^2$ və $y = \sqrt{x}$ funksiyalarının qrafikləri y=x düz xəttinə nəzərən simmetrikdirlər:



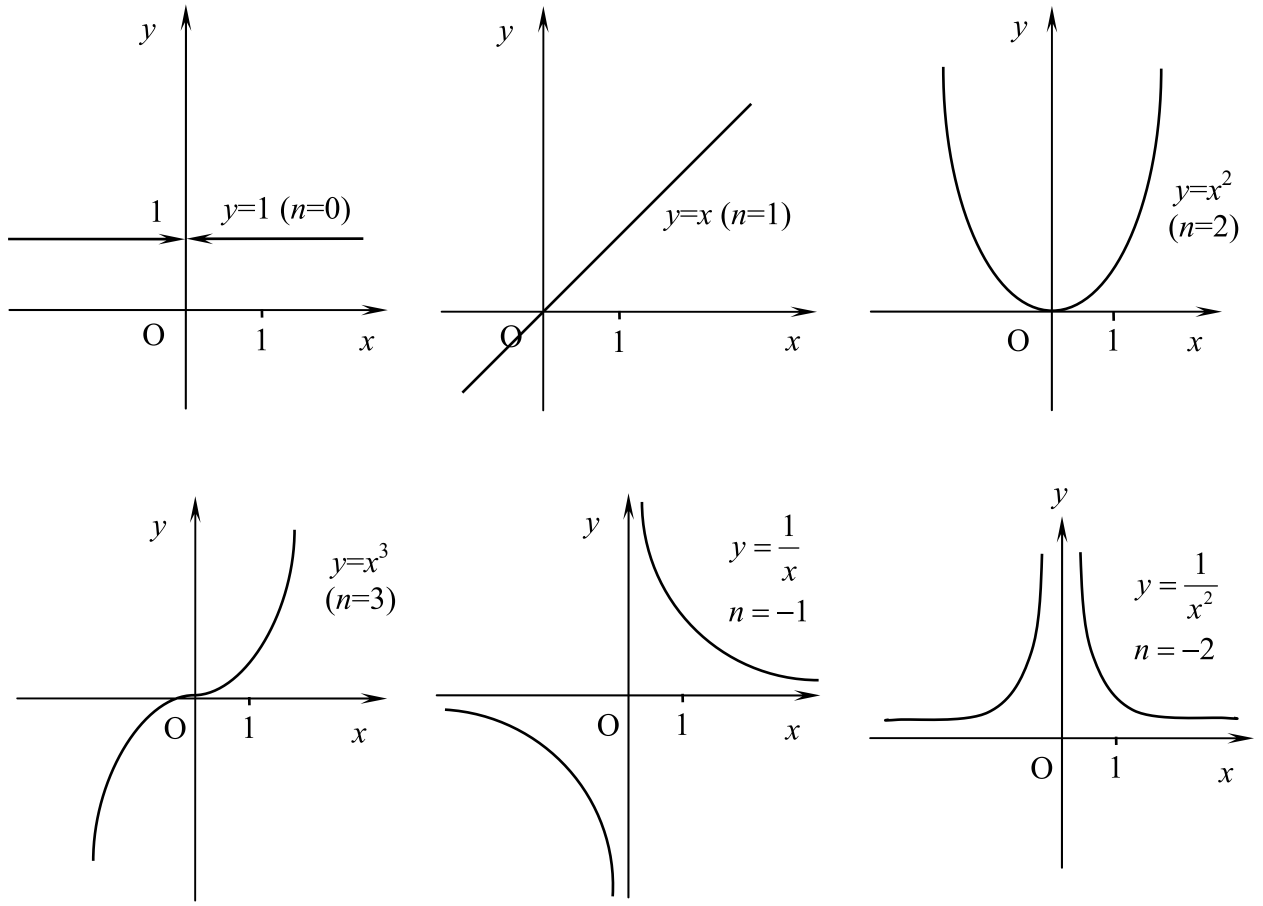
Elementar funksiyaların qrafikləri

1. ***Qüvvət funksiyası:*** $y = x^n, \quad n \in Z$.

D(y)=(-∞;+ ∞), n>0 olduqda,

D(y)=(-∞;0)∪ (0;+ ∞), n≤0 olduqda.

n=0, n=1, n=2, n=3 və n=-1, n=-2 olduqda qrafıklər belədir:

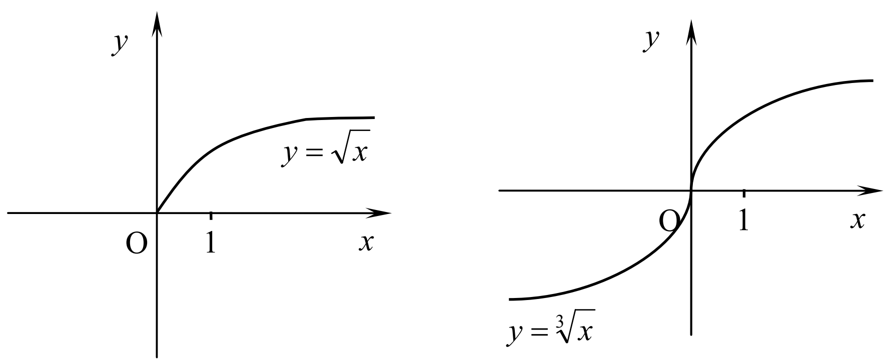


2. ***Radikal funksiya:*** $y = x^n, \quad n \in Z$.

D(y)=[0;+ ∞), n cüt olduqda,

D(y)=(-∞;+ ∞), n tək olduqda.

n=2, n=3 olduqda qrafıklər belədir:

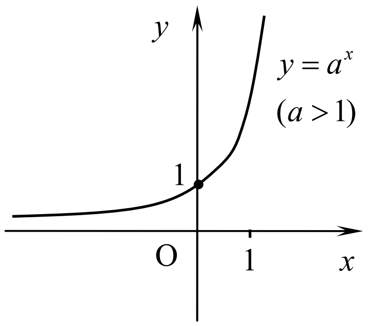


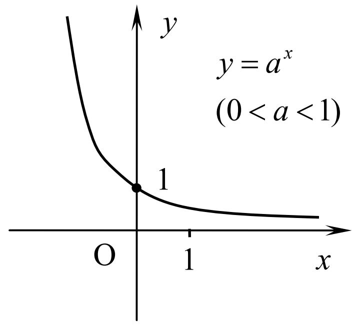
3. ***Üstlü funksiya:*** $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$.

Burada a sabitdir. D(y)=(-∞;+ ∞),

E(y)=(0;+ ∞).

a>1 və 0<a<1 olduqda qrafiklər belədir:



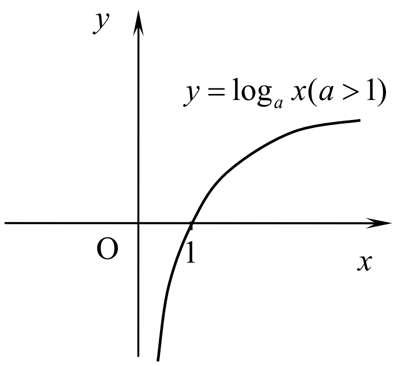


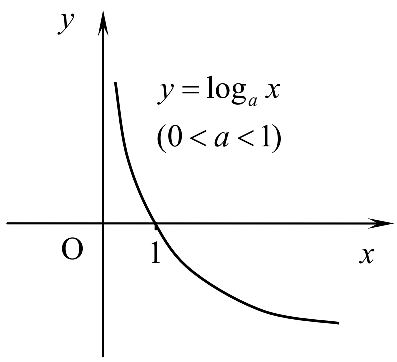
4. ***Logarifmik funksiya:*** $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$,

burada a sabitdir. D(y)=(0;+ ∞),

E(y)=(-∞;+ ∞).

a>1 və 0<a<1 olduqda qrafiklər belədir:

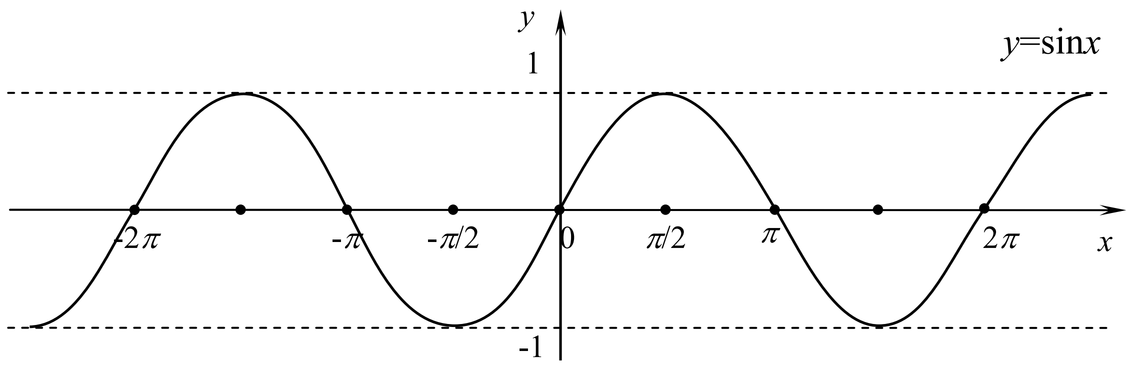




4. ***Triqonometrik funksiyalar***

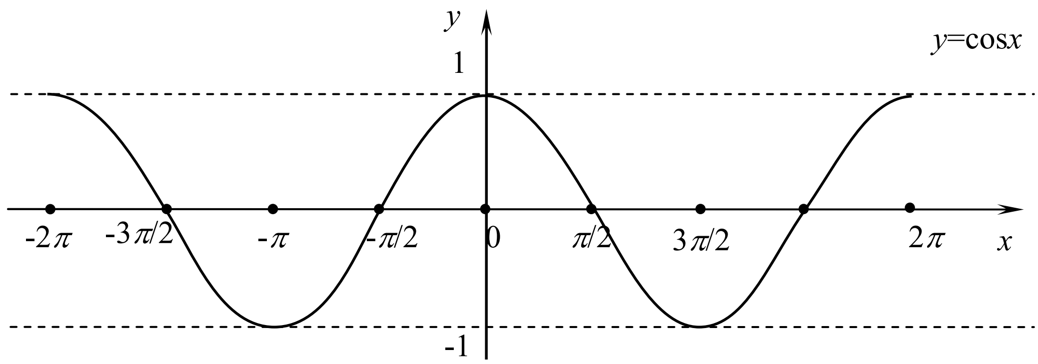
a) $y = \sin x$, D(y)=(-∞;+ ∞),

E(y)=[-1;1]. Qrafiki ***sinusoid*** adlanır.



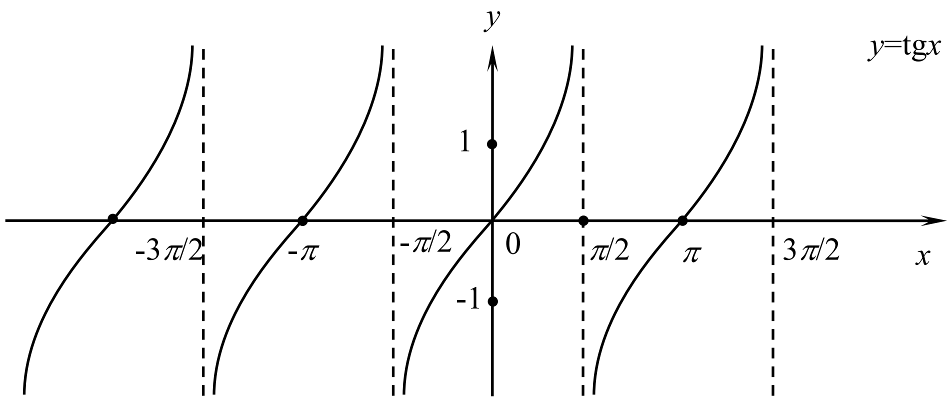
b) $y = \cos x$.   D(y)=(-∞;+ ∞),

E(y)=[-1;1].   Qrafiki ***kosinusoid*** adlanır.



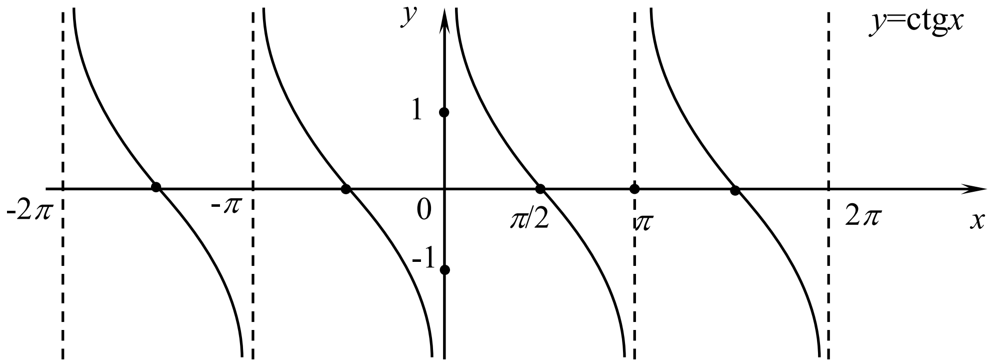
c) $y = \operatorname{tg} x$ D(y)= $\left\{ x \,/\, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\, k \in Z \right\}$,

E(y)=(-∞;+ ∞).   Qrafiki ***tangensoid*** adlanır.



d) $y = \operatorname{ctg} x$ D(y)= $\{ x \,/\, x \neq \pi k,\, k \in Z \}$,

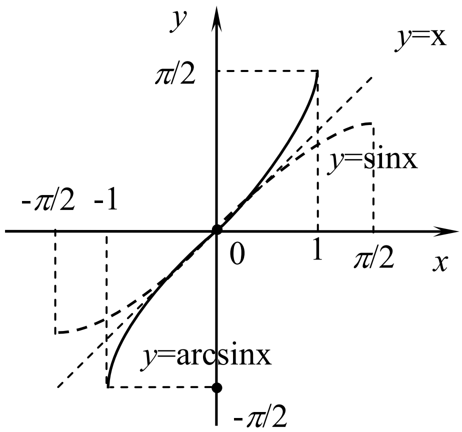
E(y)=(-∞;+ ∞). Qrafiki ***kotangensoid*** adlanır.



5. ***Tərs triqonometrik funksiyalar***

a) $y = \arcsin x$ D(y)=[-1;1],

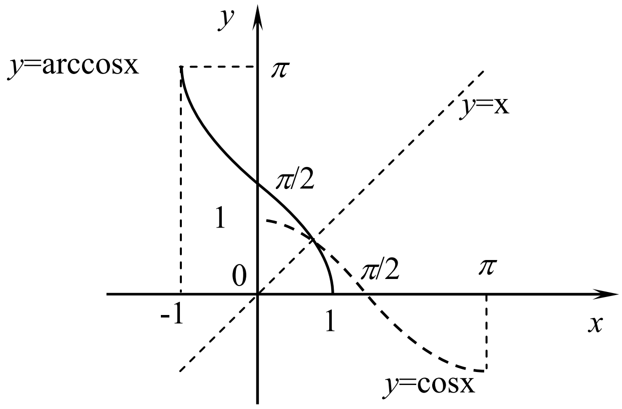
E(y)= $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



$y = \arcsin x$ funksiyasının qrafiki $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinin $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$-dakı hissəsi ilə *y*=*x* düz xəttinə nəzərən simmetrikdir.

b) $y = \arccos x$ D(y)=[-1;1],

E(y)= $[0; \pi]$.

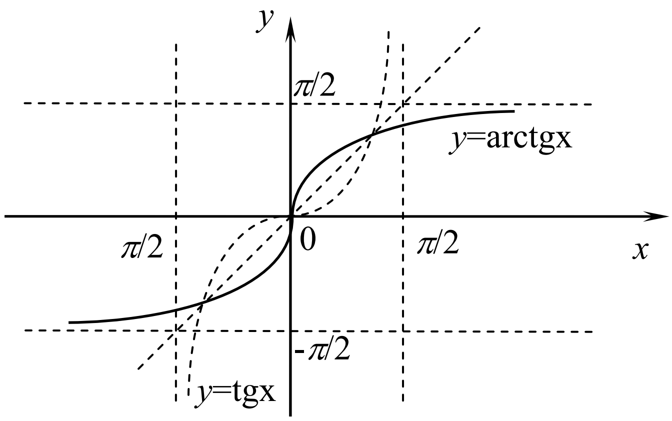


$y = \arccos x$ funksiyasının qrafiki $y = \cos x$ funksiyasının qrafikinin $[0; \pi]$-dakı hissəsi ilə *y*=*x* düz xəttinə nəzərən simmetrikdir.

c) $y = arctgx$

D(y)=(–∞;+ ∞),

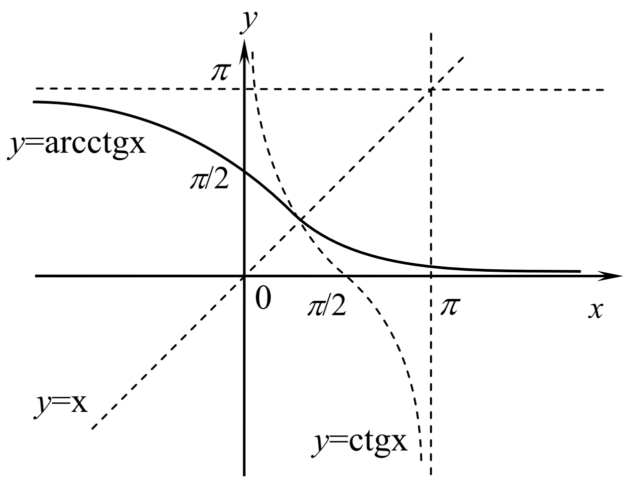
E(y)=$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



$y = arcctgx$ funksiyasının qrafiki $y = tgx$ funksiyasının qrafikinin $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralığındakı hissəsi ilə *y*=*x* düz xəttinə nəzərən simmetrikdir.

d) $y = arcctgx$ D(y)=(–∞; +∞),

E(y)=(0; π).



$y = arcctgx$ funksiyasının qrafiki

$y = ctgx$ funksiyasının qrafikinin (0; π) aralığındakı hissəsi ilə $y=x$ düz xəttinə nəzərən simmetrikdir.

Tək, cüt, periodik funksiya anlayışları

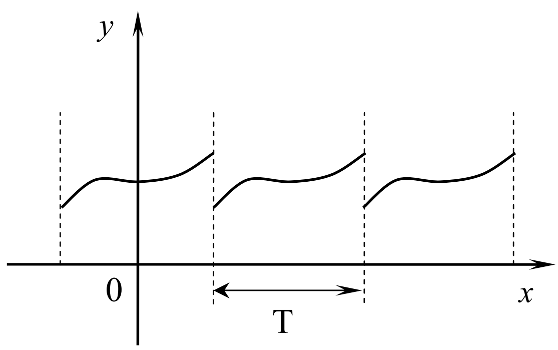
Tərif: Təyin oblastından olan istənilən x üçün $f(-x)=-f(x)$ olarsa, $f(x)$ funksiyasına tək funksiya, $f(-x)=f(x)$ olarsa, $f(x)$ funksiyasına cüt funksiya deyilir (burada təyin oblastının 0-a nəzərən simmetrik olması fərz olunur).

Tərifdən göründüyü kimi cüt funksiyanın qrafiki ordinat oxuna nəzərən, tək funksiyanın qrafiki isə koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. Məsələn, $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = \frac{1}{x^2}$ funksiyaları cüt; $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y = arctgx$, $\arcsin x$ funksiyaları isə tək funksiyalardır.

Tərif: Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası verilib və elə T ədədi var ki, təyin oblastından olan $\forall x$ üçün $x+T \in D(f)$ və

$$f(x+T) = f(x)$$

ödənilir. Onda $y=f(x)$ funksiyası *T periodlu periodik funksiya* adlanır (və ya *dövrü T olan dövri funksiya* adlanır).



Tərifdən göründüyü kimi dövrü T olan periodik funksiyanın qrafiki hər T uzunluqlu parçadan bir hissə-hissə təkrarlanır. Ona görə də periodik funksiyanı uzunluğu dövrə bərabər parçada qurmaq kifayətdir.

Məsələn, $y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{ctg} x$ funksiyaları π, $y = \cos x$, $y = \sin x$ funksiyaları 2π periodlu funksiyalardır.

MÜHAZİRƏ 13
FUNKSİYANIN LİMİTİ. GÖRKƏMLİ LİMİTLƏR

Funksiyanın nöqtədə və sonsuzluqda limitinin tərifi. Birtərəfli limitlər

Funksiyanın nöqtədə limitinin tərifini verməzdən əvvəl ədədi çoxluğun limit nöqtəsi anlayışını verək.

Tutaq ki, OX ədəd oxunda X çoxluğu və a nöqtəsi verilib. Əgər a nöqtəsinin $\forall\varepsilon-$ ətrafına X çoxluğundan olan və a-dan fərqli heç olmasa bir nöqtə daxil olarsa, onda a nöqtəsi X çoxluğunun *limit nöqtəsi* adlanır.

Tərifdən göründüyü kimi çoxluğun limit nöqtəsi bu çoxluğun özünə aid ola da bilər, olmaya da bilər.

Misal 1. $X=[0,1)$ aralığı üçün onun hər bir nöqtəsi bu aralığın limit nöqtəsidir. $a=1$ də həmin aralığın limit nöqtəsidir.

Misal 2. $X=[0,1]\cup\{2\}$ çoxluğu üçün, məsələn, $a=2$ limit nöqtəsi deyildir.

İndi funksiyanın nöqtədə limitinin tərifini verək.

Tərif. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası OX oxunun hər hansı X çoxluğunda təyin olunub və a nöqtəsi bu çoxluğun limit nöqtəsidir. Əgər arqumentin a-ya yığılan və $\{a\}$-dan fərqli $\forall x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ qiymətləri ardıcıllığı üçün funksiyanın uyğun $f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n),\dots$ qiymətləri ardıcıllığı $n\to\infty$ olduqda hər hansı b ədədinə yığılırsa, onda b ədədinə *$f(x)$ funksiyasının a nöqtəsindəki limiti* deyilir və belə işarə olunur.

$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

Funksiyanın nöqtədə birtərəfli limitlərinin tərifini verək.

Tərif. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda təyin olunub və a nöqtəsi bu çoxluğun limit nöqtəsidir. Əgər arqumentin a-ya yığılan və a-dan kiçik (böyük) $\forall x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ qiymətləri ardıcıllığı üçün funksiyanın uyğun $f(x_1)$, $f(x_2)$, …,

$f(x_n)$ qiymətləri ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda hər hansı b ədədinə yığılırsa, onda b ədədinə $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsindəki *soldan (sağdan) limiti* deyilir və belə işarə olunur.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b \quad \left(\lim_{x \to a+0} f(x) = b \right)$$

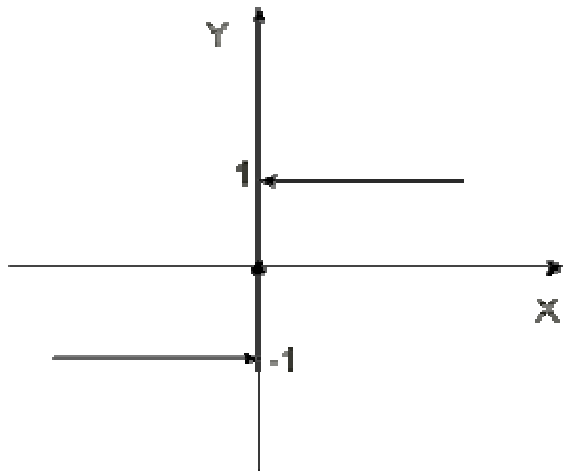
$f(x)$ funksiyasının a nöqtəsindəki soldan və sağdan limitlərinə onun a nöqtəsindəki *birtərəfli limitləri* deyilir.

Belə bir funksiyaya baxaq:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \ \textit{olduqda} \\ 0 & x = 0 \ \textit{olduqda} \\ -1 & x < 0 \ \textit{olduqda.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1,$$

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1.$$



Qeyd. $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində limiti yalnız o zaman var ki,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

olsun, başqa sözlə, həmin nöqtədə funksiyanın birtərəfli limitləri bir-birinə bərabər olsun.

İndi funksiyanın sonsuzluqda limitinin tərifini verək.

Tərif. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası və b ədədi verilib. Əgər arqumentin istənilən sonsuz böyük qiymətlər ardıcıllığı üçün funksiyanın uyğun qiymətləri ardıcıllığı b-yə yığılırsa, onda b ədədinə $f(x)$ funksiyasının ∞-dakı limiti deyilir və belə işarə olunur:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Misal. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Analoji qayda ilə funksiyanın $-\infty$ və $+\infty$-dakı limitləri anlayışı daxil olunur.

Funksiyanın limiti haqqında teoremlər

Əvvəlcə funksiyaların cəminin, fərqinin, hasilinin və qismətinin limiti haqqında teoremlə tanış olaq.

Teorem 1. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının a nöqtəsindəki limitləri uyğun olaraq, b və c ədədləridir. Onda $f(x)$ + $g(x)$, $f(x)$ - $g(x)$, $f(x)\ g(x)$ və $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$ olduqda) funksiyalarının da a nöqtəsində limitləri var və bu limitlər, uyğun olaraq, $b + c$, $b - c$, $b\ c$ və $\frac{b}{c}$ ($c \neq 0$ olduqda) ədədləridir.

İsbatı: Tutaq ki, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ arqumentin a-ya yığılan və $\{a\}$-dan fərqli ixtiyari qiymətləri ardıcıllığıdır. Onda $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının uyğun

$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ və $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n), \dots$ qiymətlər ardıcıllıqları $n \to \infty$ olduqda, uyğun olaraq, b və c-yə yığılır. Buradan alınır ki, $\{f(x_n) + g(x_n)\}$, $\{f(x_n) - g(x_n)\}$, $\{f(x_n)\ g(x_n)\}$ və $\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ ardıcıllıqları da yığılır və onların limitləri, uyğun olaraq, $b + c$, $b - c$, $b\ c$, və $\frac{b}{c}$ ədədləridir. $\{x_n\}$ ardıcıllığının ixtiyariliyinə görə yaza bilərik:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = b \pm c = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\ g(x)] = bc = \lim_{x\to a} f(x)\ \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \ \blacksquare.$$

İndi aralıq funksiya haqqında teoremlə tanış olaq.

Teorem 1. Tutaq ki, $f(x)$, $g(x)$ və $h(x)$ funksiyaları a nöqtəsinin hər hansı ətrafında təyin olunublar (a-nın özündə təyin olunmaya da bilərlər),

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$$

və bu ətrafda

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

bərabərsizliyi ödənir. Onda:

$$\lim_{x\to a} g(x) = b$$

İsbatı əvvəlki teoremin isbatına analoji qayda ilə aparılır.

Qeyd. Teorem 1 və teorem 2. $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ olduqda da doğrudur.

Birinci görkəmli limit

Teorem 1. $\frac{\sin x}{x}$ funksiyasının $x \to 0$ olduqda limiti vahidə bərabərdir:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

İsbatı. O mərkəzli R radiuslu çevrəyə baxaq. Tutaq ki, OB radiusu OA radiusu ilə x radian bucağı əmələ gətirir; fərz edək ki, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

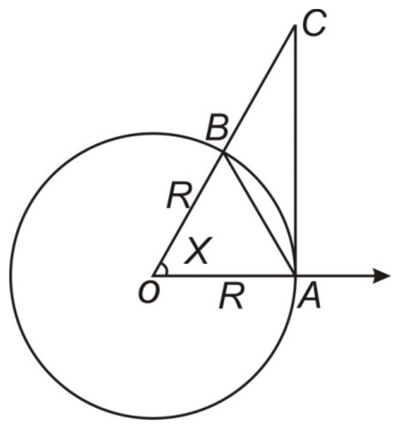
A və B nöqtələrini birləşdirək. $AC \perp OA$ olsun. Onda yaza bilərik:

$$S_{\Delta OAB} < S_{sek.\ OAB} < S_{\Delta OAC} \qquad (1)$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} R^2 \sin x,$$

$$S_{sek.\ OAB} = \frac{1}{2} R^2 x,$$

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} R \cdot R tg x = \frac{1}{2} R^2 tg x$$



Bunları (1)-də nəzərə alaq:

$$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tgx,$$
$$\sin x < x < tgx,$$
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (2)$$

Aydındır ki, $cos x$ və $\frac{\sin x}{x}$ funksiyaları cüt funksiya olduqlarından ($\cos(-x) = \cos x$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$), (2) bərabərsizliyi $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ olduqda da doğrudur.

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ olduğundan (2) münasibətindən aralıq funksiya haqqında teoremə görə alırıq ki,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \blacksquare$$

Sonuncu limit *birinci görkəmli limit* adlanır.

e ədədi. İkinci görkəmli limit

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ədədi ardıcıllığına baxaq:

$$2; \left(1\frac{1}{2}\right)^2; \left(1\frac{1}{3}\right)^3; \left(1\frac{1}{4}\right)^4; \ldots$$

n-ə qiymətlər verməklə $(1+\frac{1}{n})^n$ ifadəsinin aldığı qiymətləri hesablasaq, aşağıdakı cədvəli alarıq.

n	1	2	10	100	1000	10000	...
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,594	2,705	2,717	2,718	...

Göründüyü kimi n-in artması ilə $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifadəsinin qiyməti çox yavaş artır və $\approx 2,7$-yə yaxınlaşır. Doğrudan da isbatsız qəbul edəcəyimiz aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ardıcıllığı 2 ilə 3 arasında yerləşən sonlu bir ədədə yığılır; bu ədəd irrasional ədəddir və ***e*** ilə işarə olunur:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{1}$$

e=2,718281... (e≈2,7).

(1) limiti *ikinci görkəmli limit* adlanır.

İsbat stmək olar ki, $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiyasının $(D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty))$ da $x\to\infty$ olduqda limiti ***e*** ədədinə bərabərdir:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{2}$$

e ədədi üçün başqa ifadə də almaq olur: (2) münasibətində $\frac{1}{x}=\alpha$ işarə etsək, $x\to\infty$ olduqda $\alpha\to 0$ olduğundan ala bilərik:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \tag{3}$$

burada $\alpha > -1$ ($\alpha+1>0$).

(1), (2), (3) limitlərinin köməyi ilə bir çox limitlər hesablanır.

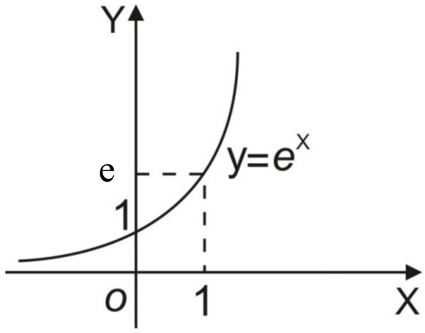
Misal. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = ?$

$\frac{2}{x}=\alpha$ əvəzləməsi aparaq. Onda $x=\frac{2}{\alpha}$ olar. $x\to\infty$ olduqda $\alpha\to 0$ olduğundan yaza bilərik:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{1/\alpha}\right)^{2}=$$

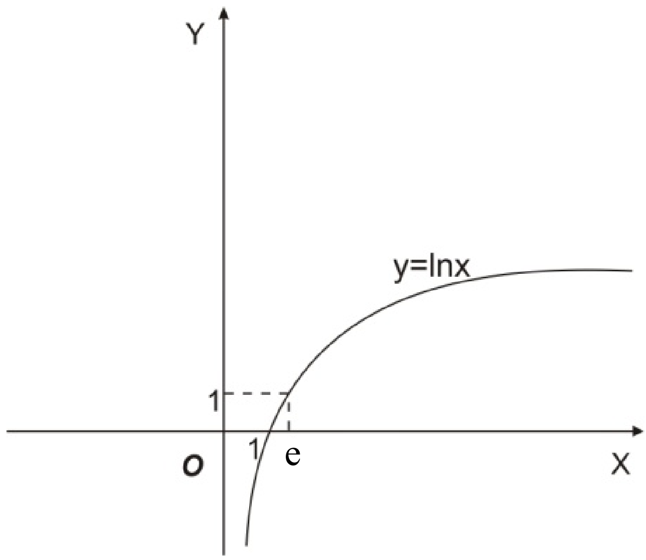
$$=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{2}=e^{2}.$$

Cavab: e^2



$y=e^x$ funksiyasına *eksponensial funksiya* deyilir. Bu funksiya üçün belə işarələmədən də istifadə olunur:

$$y=e^x=\exp x.$$



$y=\log_e x$ loqarifmik funksiyasına *natural loqarifmik funksiya* deyilir və belə işarə olunur.

$$y=\log_e x=\ln x.$$

Ali riyaziyyatda natural logarifmlər başqa əsaslı ləgarifmlərə nisbətən daha geniş tətbiq olunur.

MÜHAZİRƏ 14
FUNKSİYANİN KƏSİLMƏZLİYİ

Kəsilməz funksiyanın tərifi

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda təyin olunub və a nöqtəsi X -in limit nöqtəsidir, $a \in X$.

Tərif. Əgər $f(x)$ funksiyasının $x \to a$ olduqda limiti varsa və bu limit funksiyanın $x = a$ nöqtəsindəki qiymətinə bərabərdirsə, yəni

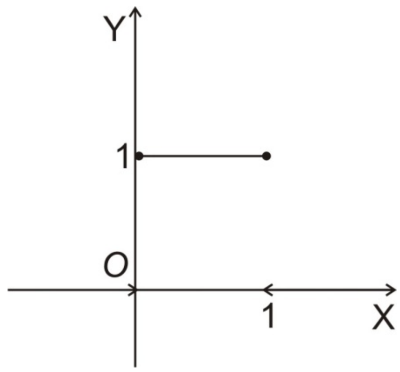
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

olarsa, onda $f(x)$ funksiyasına a *nöqtəsində kəsilməz funksiya* deyilir.

Misal 1. $y = x^2$ funksiyası $(-\infty; +\infty)$ çoxluğunun hər bir nöqtəsində kəsilməzdir.

Misal 2.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$$



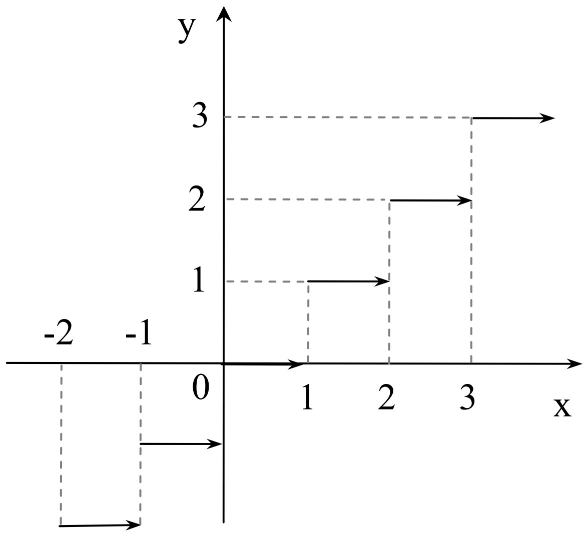
$f(x)$ funksiyası $x = 0$ və $x = 1$ nöqtəsində kəsilməz deyildir. Qalan bütün nöqtələrdə kəsilməzdir.

Tərif. Funksiya hər hansı çoxluqda təyin olunubsa və bu çoxluğun hər bir nöqtəsində kəsilməzdirsə, belə funksiyaya *çoxluqda kəsilməz funksiya* deyilir.

Tərif. Funksiyanın kəsilməz omadığı nöqtə həmin funksiyanın *kəsilmə nöqtəsi* adlanır.

Misal 2-də $x = 0$ və $x = 1$ nöqtələri baxılan funksiyanın kəsilmə nöqtələridir.

Misal 3. $y = [x]$ funksiyasına baxaq, $x = \cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ nöqtələri - $y = [x]$ funksiyasının kəsilmə nöqtələridir.



$y = x^n$ qüvvət funksiyası $\forall x \in R$ üçün kəsilməzdir ($n \in N$ olduqda).

$y = x^a$ üstlü funksiyası da ($a > 0, a \neq 1$) $\forall x \in R$ üçün kəsilməzdir (həmçinin $y = cosx, y = sinx$ funksiyaları).

Funksiyanın kəsilməzliyinin başqa tərifi

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda təyin olunub və $a \in X$ bu çoxluğun limit nöqtəsidir. $x - a$ fərqini Δx ilə işarə edək və bu fərqi arqumentin $x = a$ nöqtəsində artımı adlandıraq:

$$\Delta x = x - a.$$

$y = f(x)$ funksiyasının $x = a$ nöqtəsində Δx arqument artımına uyğun artımını Δy ilə işarə edək:

$$\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a).$$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ şərti $\lim\limits_{x \to a-0} [f(x) - f(a)] = 0$ və ya $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ şərtinə ekvivalent olduğundan funksiyanın kəsilməzliyinin tərifini yeni formada vermək olar.

Tərif. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası X çoxluğunda təyin olunub və $a \in X$ bu çoxluğun limit nöqtəsidir. Əgər bu funksiyanın $x = a$ nöqtəsindəki Δx artımına uyğun Δy artımı $\Delta x \to 0$ olduqda sonsuz kiçik kəmiyyət olarsa, yəni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ olarsa, $y = f(x)$ funksiyasına a nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir.

Kəsilməz funksiyalar haqqında əsas teoremlər

Teorem 1. Sonlu sayda kəsilməz funksiyanın cəmi kəsilməz funksiyadır.

İsbatı. Doğrudan da, əgər $f(x)$ və $g(x)$ hər hansı X çoxluğunda kəsilməz funksiyalardırsa və a nöqtəsi X çoxluğunun ixtiyari nöqtəsidirsə, onda

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a),$$

yəni $f(x) + g(x), \forall a \in X$ nöqtəsində kəsilməzdir ■

Teorem 2. Sonlu sayda kəsilməz funksiyaların hasili kəsilməz funksiyadır.

İsbatı analoji qayda ilə aparılır.

Nəticə. $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ tam polinom (çoxhədli) funksiyası kəsilməz funksiyadır.

Teorem 3. İki funksiyanın nisbəti bölənin sıfra çevrilmədiyi nöqtələrdə kəsilməz funksiyadır.

İsbatı teorem 1-in isbatına analoji qayda ilə aparılır.

Nəticə. $R(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}$ kəsr rasional funksiyası məxrəcin sıfra çevrilmədiyi nöqtələrdə kəsilməzdir.

Misal. $y = tgx = \frac{sinx}{cosx}$ funksiyası $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ nöqtələrindən başqa ədəd oxunun bütün nöqtələrində kəsilməzdir. $y = ctgx$ funksiyasının isə kəsilmə nöqtələri $x = \pi k,\ k \in z$ nöqtələridir.

Kəsilmə nöqtələrinin təsnifatı

Tutaq ki, x_0 nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtəsidir. Əgər bu nöqtədə funksiyanın sonlu birtərəfli

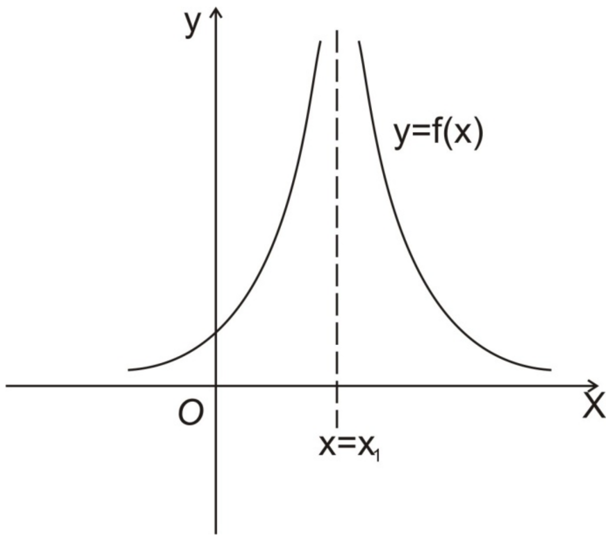
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ və } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

limitləri varsa, x_0 kəsilmə nöqtəsinə $f(x)$ funksiyasının *birinci növ kəsilmə nöqtəsi* deyilir (bu vaxt $f(x)$ funksiyasının x_0-da təyin olunması vacib deyil);

$$\delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

kəmiyyətinə funksiyanın x_0 nöqtəsində *sıçrayışı* deyilir.

Verilmiş aralıqda sonlu sayda yalnız birinci növ kəsilmə nöqtəsi olan funksiyaya *hissə-hissə kəsilməz funksiya* deyilir.



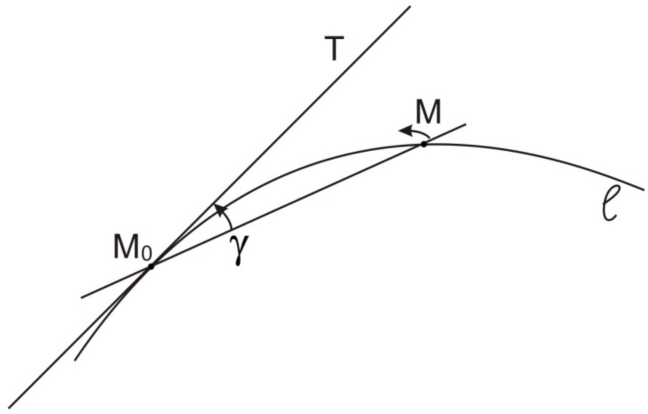
Birinci növ olmayan kəsilmə nöqtələrinə *ikinci növ kəsilmə nöqtələri* deyilir.

İkinci növ kəsilmə nöqtələrində birtərəfli limitlərdən heç olmasa biri ya yoxdur, ya da sonsuzdur (sonlu deyil). Bu halda, məsələn, əgər $x = x_1$ $f(x)$ funksiyasının ikinci növ kəsilmə nöqtəsidirsə, onda $x = x_1$ $f(x)$ funksiyasının qrafikinin *şaquli asimptotu* adlanır.

MÜHAZİRƏ 15
FUNKSİYANİN TÖRƏMƏSİ. TÖRƏMƏ ANLAYIŞINA GƏTİRİLƏN MƏSƏLƏLƏR

1. Toxunan haqqında məsələ.

Tutaq ki, M_0 nöqtəsi hər hansı kəsilməz ℓ əyrisinin qeyd olunmuş nöqtəsidir.



M_0M kəsəninə baxaq. Ola bilər ki, M nöqtəsi M_0 nöqtəsinə yaxınlaşdıqca M_0M kəsəni müəyyən bir M_0T limit vəziyyətinə yaxınlaşsın, yəni $\gamma = \angle MM_0T \to 0$ olduqda $M \to M_0$ olsun. Onda limit düz xətti olan M_0T, ℓ əyrisinin M_0 nöqtəsindəki *toxunanı* adlanır, M_0 nöqtəsinə isə *toxunma nöqtəsi* deyilir.

Məsələ. Tutaq ki, $y = f(x)$ hər hansı kəsilməz xəttin tənliyidir; $M_0(x_0, y_0)$ onun üzərində yerləşən nöqtədir. Əgər bu nöqtədə həmin xəttə toxunan varsa, onun tənliyini yazmalı.

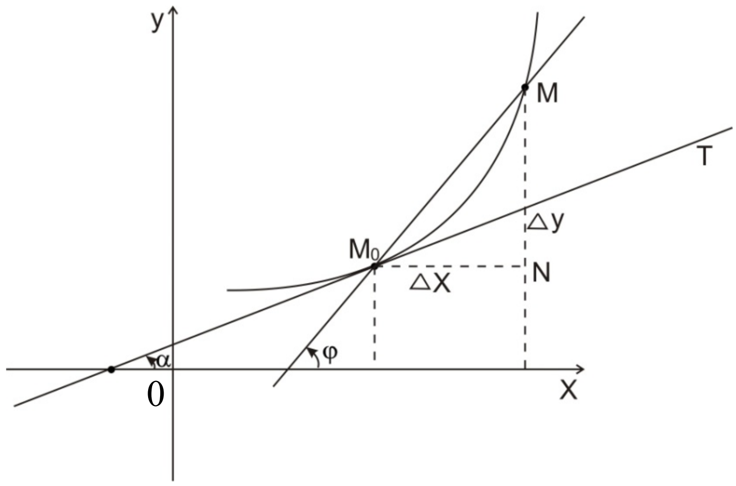
Aydındır ki, toxunan (x_0, y_0) nöqtəsindən keçdiyindən onun tənliyi

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{1}$$

şəklində olar (k – hələlik naməlumdur).

Verilmiş əyri üzərində başqa $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = M(x, y)$ nöqtəsi götürək. M_0M kəsənini çəkək. $M_0N \parallel OX$, $MN \perp OX$ olsun. ΔM_0NM katetləri Δx və Δy olan düzbucaqlı üçbucaqdır. Tutaq ki, M_0M kəsəni OX oxunun müsbət istiqaməti ilə φ bucağını əmələ gətirir. ΔM_0NM-dən yaza bilərik:

$$k' = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$



$\propto$ ilə M_0T toxunanının OX oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağı işarə edək.

Tutaq ki, $M \to M_0$ və ya $\Delta x \to 0$. Onda $\varphi \to \propto$ və əgər M_0T toxunanı OX oxuna perpendikulyar deyilsə, tgx funksiyasının kəsilməzliyinə görə alarıq ki, $tg\varphi \to tg\propto$. Onda (2)-də $\Delta x \to 0$ şərtilə limitə keçsək, alarıq:

$$k = tg\propto = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3}$$

(3)-ün sağ tərəfindəki limitə (əgər varsa) $y = f(x)$ funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsindəki törəməsi deyilir və qısa belə işarə olunur:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x_0) \tag{4}$$

Beləliklə alarıq ki, absisi verilmiş x_0 olan nöqtədə funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalı funksiyanın törəməsinin həmin x_0 nöqtəsindəki qiymətinə bərabərdir, yəni

$$k = f'(x_0).$$

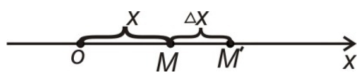
Axırıncını (1) münasibətində nəzərə alsaq, tələb olunan toxunanın tənliyi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

şəklində olar.

2. Nöqtənin hərəkət sürəti haqqında məsələ

Bu məsələ də törəmə anlayışına gətirilir. Tutaq ki, *M* maddi nöqtəsi hər hansı düz xətt üzərində hərəkət edir. Bu düz xətti OX ilə işarə edək. Zamanın hər bir *t* anına müəyyən *x* məsafəsi uyğun gəlir. Deməli, düzxətli hərəkət edən nöqtənin *x* absisi *t* zamanının funksiyasıdır:



$x = f(t)$. Bu tənlik *hərəkət tənliyi* adlanır.

Məsələ. Duzxətli hərəkət edən nöqtənin hərəkət tənliyini bilərək, istənilən anda onun sürətini tapmalı.

Tutaq ki, M nöqtəsi t anında x, $t+\Delta t$ anında isə $x+\Delta x$ məsafəsini gedib, onda:

$$\Delta x = x + \Delta x - x = f(t+\Delta t) - f(t).$$

$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ nisbəti orta sürəti ifadə edir. $\Delta t \to 0$ olduqda orta sürətin limiti t anındakı ani sürəti verir. t anındakı ani sürəti υ ilə işarə etsək, yaza bilərik:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{4}$$

Əvvəlki məsələyə analoji qayda ilə deyə bilərik ki, (4) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadə $x = f(t)$ funksiyasının t-yə görə törəməsidir: $\vartheta = f'(t)$.

Beləliklə, düzxətli hərəkətin sürəti məsafənin zamana görə törəməsinə bərabərdir.

Funksiyanın törəməsinin tərifi. Törəmənin həndəsi və fiziki mənası

Tərif. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası hər hansı (a, b) aralığında təyin olunub və x bu aralığın hər hansı qeyd olunmuş nöqtəsidir. Əgər arqumentə Δx artımı verdikdə $(x + \Delta x \in (a, b))$, $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ nisbətinin $\Delta x \to 0$ olduqda limiti varsa, onda bu limit $f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində törəməsi adlanır və $f'(x)$ ilə işarə olunur:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(və ya $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$).

Misal. $y = x^2$ funksiyasının x $(x \in R)$ nöqtəsində törəməsini tapaq.

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$,

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$,

$(x^2)' = 2x.$

Cavab: $2x$.

Beləliklə, $f(x)$ funksiyasının törəməsi bu funksiyadan müəyyən qayda ilə alınmış yeni bir f'(x) funksiyasıdır. Törəmə funksiyanı göstərmək üçün $y' = f'(x)$ işarələməsindən başqa $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$ və ya $\dot{y} = \dot{f}(x)$ işarələmələrindən də istifadə edirlər.

Törəməyə gətirilən məsələlərdən törəmənin həndəsi və fiziki mənası alınır.

Törəmənin həndəsi mənası. Verilmiş $y = f(x)$ funksiyasının $y' = f'(x)$ törəməsi x absisli nöqtədə həmin funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir.

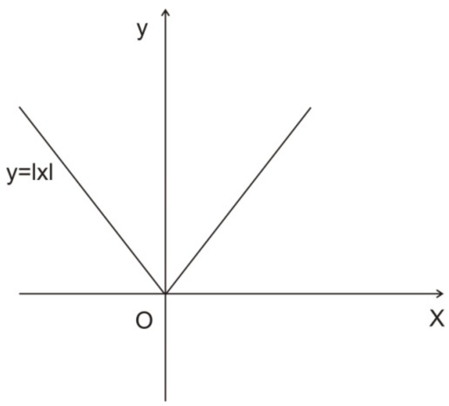
Törəmənin fiziki mənası.x zamanından asılı $y = f(x)$ funksiyasının $y' = f'(x)$ törəməsi baxılan x anında y funksiyasının dəyişmə sürətini verir.

X çoxluğunun hər bir nöqtəsində törəməsi olan funksiyaya həmin çoxluqda *diferensiallanan funksiya* deyilir.

Kəsilməzliklə törəmə arasında əlaqə

Teorem. Funksiyanın hər hansı nöqtədə törəməsi varsa, onda bu funksiya həmin nöqtədə kəsilməzdir.

Tərs təklif döğru deyil. Kəsilməz funksiyanın törəməsi olmaya da bilər. Doğrudan da, məsələn, $y = |x|$ funksiyası $x = 0$ nöqtəsində kəsilməzdir, lakin bu nöqtədə törəməsi yoxdur (belə ki, (0,0) nöqtəsində funksiyanın qrafikinə toxunan yoxdur).



İndi teoremin isbatını verək.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində törəməsi var. Onda bu nöqtədə:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

İsbat edək ki, $f(x)$ funksiyası x nöqtəsində kəsilməzdir, başqa sözlə isbat edək ki, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Doğrudan da, $\Delta x \neq 0$ olduqda $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ olduğundan yaza bilərik:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0. \blacksquare$$